平成18年度

相対性理論　講義ノート

担当　　江沢

Contents

Chapter 1

序章

1.1 相対性理論の考え方

自然科学では自然現象に内在する規則性を探求することが主要な目的の１つである。この規則性の中でも基礎的なものは自然法則といわれる。これらの規則性の多くは、それが見出されたときには自然現象の観察や実験から得られた新しい知識であったが、その後より基礎的な規則性が見出されると、後者を用いて説明されるようになる。このようなことは、自然科学が発展するという場合の典型である。

現在でも広範囲の現象の説明に適用されている自然法則のうち最初に見出されたものは、物体の運動についてのもので、ニュートンの運動の法則として知られている。この法則が見出された当時においても、物体の運動は観測者によって異なって見えるということは認識されていた。各観測者が見る運動は見かけの運動とと呼ばれていた。ニュートンは自然法則は見かけの運動ではなく、真の運動に対して成立すると考えた。そのために、(未知ではあるが) 運動していない観測者から見た、あるいは、絶対静止系から見た運動に対して自然法則が成立するとして、そのような座標系を用いたときに運動方程式が成立すると考えた。この方程式はもちろん

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{1.1}$$

である。ここで、$\mathbf{p}$ は物体の運動量であり、$\mathbf{F}$ は物体に作用する力である。また、絶対座標系の条件として、その座標系では物体に力が作用していなければ、物体は等速直線運動をするとした。これはもちろん (ガリレイが見いだした) 慣性の法則である。(さらに、力については作用反作用の法則が成り立つとした。) 従って、ニュートンの考え方には相対性はない。ある座標系から運動を見て、(1.1) 式と比べたとき、違いがあれば、その座標系は絶対座標系ではなく、違いが小さいほど絶対座標系に近いことになる。

しかし、ニュートン以前に、ガリレイは物体の運動は、地上で見ても船の上で見ても同じ法則に従うであろうことを見出していた。このことを一般化し、絶対静止系に対して、等速度運動している観測者から見た運動の法則は絶対静止系と同じであることが示された (このときの速度は任意である)。このことを、**ガリレイの相対性原理**という。すなわち、物体の運動に関する限り、互いに等速度運動する**観測者は同等**であることになる。次にこのことをもう少し詳しく見てみよう。

1.2　ガリレイの相対性原理

1.2.1　座標系の選択

現代科学の説明における最大の特徴はその定量性である。ガリレイの相対性原理を定量的に扱うには、まず、座標系を決めなければならない。上述のように、ニュートンの運動の法則は、絶対静止系に対して等速度で運動する座標系ならば成立する。しかし、以下に示すように第一法則、すなわち、慣性の法則が成り立つという条件だけで座標系を選べば十分である。このような系を**慣性系**という。以下では慣性系を用いた場合を考える。もちろん、慣性系は絶対静止系に対して等速度運動をしていなければならない。

◇どのような座標系 (慣性系) を選ぶかについては、観測者に都合のよいものを選べばよい。従って、座標系と観測者は 1：1 に対応すると考えてよい。さらに、通常は観測者は座標系の原点に静止しているように考える。

1.2.2　座標変換 (ガリレイ変換)

二つの座標系で測定される物理量の間の関係を一般に座標変換というが、最も基本的な位置を表す座標の関係が重要である。

デカルト座標を用い、絶対座標系 S での座標を (x, y, z)、慣性系 S' での座標を (x', y', z') とする。二つの系の座標軸は互いに平行とし、$t(=t') = 0$ のとき、二つの原点 O, O' は一致するとする。また、O 系から見た O' 系の速度を $\mathbf{u}$ とする。点 P の S 系および S' 系における位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ とすると、図から明らかに次式が成立すると考えられる：

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'} \tag{1.2a}$$

ここで、

$$\underline{\underline{\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}t}} \tag{1.3}$$

[図 1.1　ガリレイ変換の図]

(1.2a)、(1.3) は座標を用いると

$$\boxed{\begin{cases} x = x' + u_x t \\ y = y' + u_y t \\ z = z' + u_z t \end{cases}} \tag{1.2b}$$

と表せる。(1.2a,b) はガリレイ変換といわれる。

(1.2a,b) の他に、時間は両方の系で共通であることを表す式

$$\underline{\underline{t = t'}} \tag{1.4}$$

をガリレイ変換に付け加えることが多い。

1.2.3 慣性系から見た運動の法則

(I) 慣性系の定義より、第一法則は成立する。

(II) 第二法則、すなわち、(1.1) 式を、まず、運動量の定義を用いて、次のよく用いられる形に書く：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{1.5}$$

ここで、m はもちろん物体の質量であり、時間微分は上に付けた点で表した。

(III) 速度、加速度の変換

(1.2a,b)、(1.4) から、速度 $\mathbf{v}$ および加速度 $\mathbf{a}$ の変換は次のようになる：

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{u}, \qquad \text{あるいは} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}} \tag{1.6}$$

および

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}', \qquad \text{あるいは} \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}'} \tag{1.7}$$

(IV) 物体の質量、力は二つの系で同じとする。

(物体の重さやバネの伸び方は地上と船の上で同じ。)

$$m' = m \qquad \mathbf{F}' = \mathbf{F}$$

これらは、物体の運動に関連した物理量のガリレイ変換である。

(III)、(IV) の変換を用いると、(1.5) の運動方程式は慣性系では次の形になる：

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}' \tag*{(1.5)$'$}$$

この形は明らかに (1.5) と同じである。
また、力は (IV) から変換されないから、第三法則は慣性系でも成り立つ。
従って、ニュートンの運動の法則は慣性系と絶対静止系で同じ形になる。
これは、法則の中に慣性系の速度に関するものが含まれていないためである。ある系が絶対静止系か否かは観測あるいは実験によって確かめる方法はないが、ある系が慣性系か否かは慣性の法則が成立するか否かで判定することが出来る。また、任意の慣性系で、ニュートンの運動の法則は同じ形で表される。従って、物体の運動に関する限り、絶対静止系を用いる必要はなく、また、慣性系は運動の法則に関する限りすべて同等である。

問　運動量の座標変換を求め、(1.1) の形の運動方程式が座標系によらないことを示せ。

1.2.4　電磁気学の法則

物体の運動に関する限り、すなわち力学に関しては、すべての慣性系は同等であった。それでは、もう一つの基礎的な分野である、電磁気学についてはどうであろうか。電磁気学の法則はマックスウェル方程式で表される。真空中では次にようになる：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.8}$$

第 3 式の rot をとり、第 4 式を用いると

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{E} = 0} \tag{1.9}$$

これは電場に対する波動方程式であり、電場が位相速度 c で伝播することを示している。磁場に対しても同様である。

問　磁場に対する波動方程式を導け。

このことは力学の場合と根本的に異なり、**基本法則に速度が現れている**。ガリレイ変換では速度は座標変換を受けるので、位相速度 c がどの座標系から見たものかという問題が重要である。絶対静止系から見た場合であると考えるのは自然である。ある慣性系から見た電磁波の速度が理論的に導ければ (これは以下に見るように容易にできる)、慣性系の絶対静止系に対する速度が測れそうである。実際、この速度を測定しようとする実験が多く試みられたが、最終的に Michelson- Morley の実験により、この速度は 0、すなわち任意の慣性系での光の速さは c であることが見出された。
一般に、

『波動の振幅はガリレイ変換で不変である。』

そこで、『電磁場もガリレイ変換で不変である』と**仮定して**、座標変換がガリレイ変換であるとすると波動方程式がどのように変換されるかを考えてみよう。(電場から電子に作用する力は $-e\mathbf{E}$ であり、力は慣性系によらないから、電気素量がスカラーならば、電場も慣性系によらないことになるのでこの仮定はもっともらしく思われる。磁場中の変形する回路の場合 – 磁場中の長方形の回路の一辺を速度 v で動かすときに流れる電流に対する起電力を静止系で見た場合と、速度 v で運動する系で見た場合 – は？)

簡単のために、x 方向に速さ c で伝わる平面波を考える。

☆ x 方向に伝わる平面波は、振幅 F が x と t だけの関数 $F = F(x,t)$ で、波動方程式

$$\underline{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)F(x,t) = 0} \tag{1.10}$$

を満たす。

ガリレイ変換では $x = x' + ut,\ t = t'$ となること、および、波動の振幅がガリレイ変換で不変なこと、$F(x,t) = F'(x',t')$、を用いると、合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}F'(x',t') \\ &= \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\right)F'(x',t') \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t'} - u\frac{\partial}{\partial x'}\right)F(x',t')\end{aligned} \tag{1.1a}$$

同様にして、x についての微分を書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,t) = \frac{\partial}{\partial x'}F'(x',t') \tag{1.11b}$$

となる。さらに、2 階微分を書き直すと、波動方程式は次のようになる：

$$\underline{\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - (c^2-u^2)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2cu\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'}\right)F'(x',t') = 0} \tag{1.12}$$

すなわち、**波動方程式の形はガリレイ変換で不変ではない。**

問　(1.11.b)、(1.12) を示せ。

◇ 波の速さ (位相速度) について

新しい座標 (「光円錐座標」) を

$$\underline{x^+ \equiv x + ct, \quad x^- \equiv x - ct} \tag{1.13a}$$

と定義する。逆に解くと

$$\underline{x = \frac{1}{2}(x^+ + x^-), \quad ct = \frac{1}{2}(x^+ - x^-)} \tag{1.13b}$$

このとき、微分について次の関係がある

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial (ct)}\right), \quad \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial (ct)}\right) \tag{1.14a}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_+ + \partial_-, \quad \frac{\partial}{\partial (ct)} = \partial_+ - \partial_- \tag{1.14b}$$

これより、x^+, x^- を用いると、波動方程式は次のように書ける

$$\underline{\partial_+ \partial_- F(x^+, x^-) = 0} \tag{1.15}$$

この微分方程式の一般解は

$$\begin{aligned} F(x^+, x^-) &= F_R(x^-) + F_L(x^+) \\ &= \underline{F_R(x - ct) + F_L(x + ct)} \end{aligned} \tag{1.16a}$$

のように表せる。ここで、$F_R(x^-)$ および $F_L(x^+)$ は任意の関数である。$F_R(x^-)$ は速さ c で右 (正方向) へ進む波を、$F_L(x^+)$ 左 (負方向) へ進む波を表す。
また、$x^+ = x' + (c+u)t', \quad x^- = x' - (c-u)t'$ であることを用いると

$$\underline{\underline{F(x^+, x^-) = F_R(x' - (c-u)t') + F_L(x' + (c+u)t')}} \tag{1.16b}$$

この式は、ガリレイ変換後の座標系では右向きの波の速さは $c-u$、左向きの波の速さは $c+u$ であることを表している。従って

『電磁気学ではガリレイの相対性原理は成立しない。』

ことになる。すなわち、マックスウェル方程式は絶対静止系でのみ成り立ち、慣性系の速度は光速を測定することにより求められると考えられた。しかし、Michelson-Morley の実験により、慣性系の速度は測定できないことになった。

Chapter 2

特殊相対性理論の基礎

2.1　光速不変の原理と同時性

Michelson-Morley の実験により、真空中の光速は慣性系によらないことが確立されたということができる。従って、**速度の変換はガリレイ変換、(1.6) 式、ではあり得ない**ことになる。この『真空中の光速が慣性系によらないということ』は**光速不変の原理**といわれる。なお、特に断らない限り、座標系としては当分慣性系のみを用いる。

光速不変の原理によれば、2 つの出来事が同時に起きたかどうかは座標系によるということは、次の例を考えれば明らかであろう：

『**ある列車の 1 つの車両の中央から光を出す**。』

これを地上に立ってみる (地上に静止した座標系 O を用いる) 場合と列車の中で見る (列車と共に運動する座標系 O' を用いる) 場合とを比べよう。

[図 2-1　同時性の検証]

O' 系で見ると、光速はどちら向きにも c だから、光は明らかに車両の前後の扉に**同時に達する**であろう。他方、O 系で見ると、光は逃げて行く前の扉には追いつかねばならず、後ろの扉は向かってくるので、光速が方向によらなければ、後ろの扉のほうに早く達するのは明らかであるう。すなわち、O 系で見ると、光は前後の扉に**同時には達しない**。このようなことは時間が変換されないガリレイ変換と矛盾する。従って

『**O 系から O' 系への座標変換はガリレイ変換ではあり得ない**。』

ことになる。すなわち、

『新しい座標変換では時間も変換される』

はずである。変換はもちろん 2 つの系の相対速度によるであろう。

光速不変の原理は実験から得られたものである。そこで、この原理を理論の出発点として採用し、それを満たす座標変換が求められた。この座標変換は特殊相対論の基礎をなしている。この変換は、歴史的には Lorentz によって、マックスウェル方程式の形を変えない変換として、最初に求められたので Lorentz 変換と呼ばれている。その後、物理的な考察によって、アインシュタインが再び導出した。以下ではアインシュタインに従って、この変換を求める。

2.2 空間と時間：長さと時間の測り方

ガリレイ変換は経験的には大変自然なものであり、Michelson-Morley の実験により否定されるまでは、長く正しいとされていた。現在でも、厳密には正しくないが、光速よりも十分遅い速度だけを考えればよい場合には、極めてよい近似として用いられている。このように有用で自然なガリレイ変換を変更するには、自然で現実的な出発点が必要である。アインシュタインは、空間および時間の性質、距離 (長さ) および時間の測り方を厳密に決めることから出発した。

2.2.1 空間：距離の測り方

3 次元空間はユークリッド空間とする。すなわち、空間は**一様** (特別な点はない) で**等方的** (特別な方向はない) とする。この空間の性質は当然と思われてきたもので、その確認である。
空間の 2 点間の距離 (物体の長さは両端の間の距離) の測定は**座標系に静止した物差し**でなされる。(物体は運動すると長さが変わるかも知れない。) 従って、座標軸の目盛りはこのような物差しを用いて付ける。
空間座標の原点、座標軸の方向は空間が一様・等方的なので任意に (都合がよいように) 選ぶことができる。このようにして、座標軸と目盛りを決めれば、空間の点の位置を測ることができる。2 点の位置が測られれば、2 点間の距離は直接測らなくてもピタゴラスの定理を用いて計算できる。

2.2.2 時間：その測り方

時間の**経過は一様**であるとする。従って、時間の原点は任意に選んでよい。ある現象が起きた時刻は、**その場所に置かれた** (その場所に静止している観測者が持つ) **時計**で測る。(時計が運動すると、進み方が変わるかも知れない。) 従って、

『2 点で起きたことが同時かどうかを知るには、2 個の時計が必要。』

一般には、あることがどこで起きてもその時刻を知ろうとすると、それを測定する観測者毎

に時計を置いておかなければならない。すなわち、ある座標系で時刻を測るには観測者の数だけの時計がいることになる。従って、予めこれらの時計を合わせておかなければならない。

2.3 時計を合わせる：光速不変の原理に基づく

新しい変換とガリレイ変換の最大の違いは、時間も座標変換を受けるはずであるということである。従って、時計の合わせ方は重要であり、明白な基準に基づかなければならない。新しい変換は、光速不変の原理から要請されたものなので、時計の合わせ方もこの原理だけに基づく方法があれば最も望ましいことである。以下で、実際このようなことが可能であることを示す (大げさにいったが難しいことではない：難しくては困る！)。

ある慣性系で固定された 2 点 A、B に置かれた (2 点 A、B にいる観測者が持つ) **時計があっている**とは、次のことが成り立つことをいう：
点 A から光を出し、点 B で反射させ、点 A に戻すとする。

t_A: 点 A から光が出たときの、A にある時計の示す時刻
t_B: 点 B に光が届き、反射されたときの点 B にある時計の示す時刻
$\tilde{t}_A$: 光が点 A に戻ってきたときの、点 A にある時計の示す時刻

このとき

『$t_B - t_A = \tilde{t}_A - t_B$ であれば、2 つの時計はあっていると定義する。』

この定義は、操作的には明確であり、直感的にも納得できるであろう。この方法で、任意の観測者同士は互いに時計を合わせることができる。ただし、時計を合わせた後に移動させてはいけない。移動させるということは、時計に力が働くことであり、時計の進み方に影響がないという保証はない。

以上で、時間と空間の位置の測り方が確定したので、慣性系の間の新しい座標変換 (ローレンツ変換) を求めよう。

2.4 ローレンツ変換の導出

時間と空間の一様性により、時間と空間の原点は任意に選んでよい。そこで、2 つの慣性系 O、O' の空間的な原点を $t = t' = 0$ で一致するように選ぶ。O 系の座標を (t, x, y, z)、O' 系の座標を (t', x', y', z') とする。慣性系同士の同等性および時間と空間の一様性から、これらの座標の間の関係は **1 次式**でなければならない。このことは、等間隔な点はどの系から見ても等間隔であることを考えれば分かるであろう。従って、座標変換の一般的な式は次のよう

に書ける：

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \Lambda_{11}x + \Lambda_{12}y + \Lambda_{13}z + \Lambda_{14}t && (2.1a)\\ y' &= \Lambda_{21}x + \Lambda_{22}y + \Lambda_{23}z + \Lambda_{24}t && (2.1b)\\ z' &= \Lambda_{31}x + \Lambda_{32}y + \Lambda_{33}z + \Lambda_{34}t && (2.1c)\\ t' &= \Lambda_{41}x + \Lambda_{42}y + \Lambda_{43}z + \Lambda_{44}t && (2.1d) \end{aligned}}$$

O 系から見て、O' 系が進む方向を x 方向とし、進む速さを v とする。すなわち、O 系から見た O' 系の速度 $\mathbf{v}$ を $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ とする。また、2 つの系の座標軸は互いに平行とする。

◇ 記号の変更

(2.1a)–(2.1d) の表しかたは少し長いので、アインシュタインによるコンパクトな表し方を用いる。まず、座標：

$$\boxed{(t, x, y, z) \ \rightarrow \ (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \text{略して} \quad x^\mu \ \text{あるいは} \ \{x^\mu\} \ (\mu = 0, 1, 2, 3)} \tag{2.2}$$

このとき、(2.1a)–(2.1d) は次のように表せる

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^\nu, \quad (x^{\mu'} = 0, 1, 2, 3) \tag{2.3a}$$

次に、**アインシュタインの和の規約**：

「同じ添え字が上下に対であるときには、その添え字について 0 から 3 まで和をとる。」

$$\underline{\underline{\sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^\nu \equiv \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^\nu}} \tag{2.4}$$

これを用いると、(2.3a) は次のようになる

$$\boxed{x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^\nu, \quad (x^{\mu'} = 0, 1, 2, 3)} \tag{2.3b}$$

問題は座標変換を求めること、すなわち、$\underline{\underline{\text{16 個の係数 } \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \text{ を決める}}}$ ことであった。この係数が基本的な仮定である

『空間の一様・等方性、光速不変の原理およびそれにに基づく時計の合わせ方』

だけから決まることを以下に示そう。

[**A**] $\underline{t = t' = 0 \text{ に原点から出た光が、} x' \text{ 軸上にある鏡 R}' \text{ で反射されて原点 O}' \text{ に戻る場合}}$：
(x′ 軸上にある時計と原点 O′ にある時計を合わせる場合)

[図 2-2　[**A**] の場合の図]

O 系では、$\overline{\mathrm{O'R'}} \equiv \ell_1$ とし、時刻 t_1 に反射し、時刻 t_2 に原点 $\mathrm{O'}$ に戻るとする。このとき

$$\begin{cases} \text{行き} & \qquad\qquad\qquad ct_1 = \ell_1 + vt_1 \\ & \text{および} \\ \text{帰り} & \qquad\qquad\qquad c(t_2 - t_1) = \ell_1 - v(t_2 - t_1) \end{cases}$$

となる。よって

$$\underline{t_1 = \frac{\ell_1}{c-v}, \qquad t_2 = \frac{2c\ell_1}{c^2 - v^2}} \tag{2.5}$$

従って、反射点では

$$\bigstar \begin{cases} x^\mu = (t, x, y, z) = (\ell_1/(c-v),\ c\ell_1/(c-v), 0, 0) \\ x^{\mu'} = (t', x', y', z') = (t'_1, x'_1, 0, 0) \end{cases}$$

となるから、(2.3) の $\mu = 0$ の場合に代入すると

$$x_1^{0'} = t'_1 = \Lambda^{0'}{}_0 \frac{\ell_1}{c-v} + \Lambda^{0'}{}_1 \frac{c\ell_1}{c-v} \tag{2.6}$$

となり、また、$\mu = 1$ の場合に代入すると

$$x_1^{1'} = x'_1 = \Lambda^{1'}{}_0 \frac{\ell_1}{c-v} + \Lambda^{1'}{}_1 \frac{c\ell_1}{c-v} \tag{2.7}$$

となる。$\mu = 2, 3$ の場合にそれぞれ代入すると

$$0 = \Lambda^{2'}{}_0 \ell_1/(c-v) + \Lambda^{2'}{}_1 c\ell_1/(c-v) = \Lambda^{3'}{}_0 \ell_1/(c-v) + \Lambda^{3'}{}_1 c\ell_1/(c-v)$$

となる。よって

$$\underline{\underline{\Lambda^{2'}{}_0 = -c\Lambda^{2'}{}_1, \qquad \Lambda^{3'}{}_0 = -c\Lambda^{3'}{}_1}} \tag{2.8}$$

◇ 原点に戻ったとき、$\mathrm{O'}$ の x 座標は vt_2 だから、このとき (2.5) を用いて

$$\bigstar \begin{cases} (t, x, y, z) = (t_2, vt_2, 0, 0) = \left(\dfrac{2c\ell_1}{c^2 - v^2},\ \dfrac{2c\ell_1 v}{c^2 - v^2},\ 0,\ 0\right) \\ (t', x', y', z') = (t'_2, 0, 0, 0) \end{cases}$$

よって、(2.3) の $\mu = 0$ の場合に代入すると

$$x_2^{0'} = t'_2 = \Lambda^{0'}{}_0 \frac{2c\ell_1}{c^2 - v^2} + \Lambda^{0'}{}_1 \frac{2c\ell_1 v}{c^2 - v^2} \tag{2.9}$$

となり、$\mu = 1$ の場合に代入すると、$x'_2 = 0$ だから

$$0 = \Lambda^{1'}{}_{0}\frac{2c\ell_1}{c^2 - v^2} + \Lambda^{1'}{}_{1}\frac{2c\ell_1 v}{c^2 - v^2} \tag{2.10}$$

となる。よって

$$\underline{\underline{\Lambda^{1'}{}_{0} = -v\Lambda^{1'}{}_{1}}} \tag{2.11}$$

$\mu = 2, 3$ の場合にそれぞれ代入すると

$$0 = \Lambda^{2'}{}_{0}\frac{2c\ell_1}{c^2 - v^2} + \Lambda^{2'}{}_{1}\frac{2c\ell_1 v}{c^2 - v^2} = \Lambda^{3'}{}_{0}\frac{2c\ell_1}{c^2 - v^2} + \Lambda^{3'}{}_{1}\frac{2c\ell_1 v}{c^2 - v^2}$$

よって

$$\underline{\underline{\Lambda^{2'}{}_{0} = -v\Lambda^{2'}_{1}, \qquad \Lambda^{3'}{}_{0} = -v\Lambda^{3'}{}_{1}}} \tag{2.12}$$

(2.8)、(2.12) から $v \neq c$ なので

$$\underline{\underline{\Lambda^{2'}{}_{1} = \Lambda^{2'}{}_{0} = \Lambda^{3'}{}_{1} = \Lambda^{3'}{}_{0} = 0}} \tag{2.13}$$

となる。

ところで、時計合わせの方法から

$$t'_2 = 2t'_1 \tag{2.14}$$

だから、(2.6)、(2.9) から

$$\Lambda^{0'}{}_{0}\frac{2c\ell_1 v}{c^2 - v^2} + \Lambda^{0'}{}_{1}\frac{2c\ell_1 v}{c^2 - v^2} = 2\Big(\Lambda^{0'}{}_{0}\frac{\ell_1}{c - v} + \Lambda^{0'}{}_{1}\frac{c\ell_1}{c - v}\Big)$$

これより、$\Lambda^{0'}{}_{1}$ を $\Lambda^{0'}{}_{0}$ で表すと次のようになる：

$$\underline{\underline{\Lambda^{0'}{}_{1} = -\frac{v}{c^2}\Lambda^{0'}{}_{0}}} \tag{2.15}$$

[**B**] <u>次に、R' が y' 軸上にある場合を考える。</u>

O 系では $\overline{\mathrm{O'R'}} = \ell_2$ とし、反射の時刻を t_1、O' に戻る時刻を t_2 とする。

[図 2-3　**B** の場合の図]

図から、ピタゴラスの定理により

$$(ct_1)^2 = (vt_1)^2 + {\ell_2}^2, \qquad \text{よって} \qquad t_1 = \ell_2/\sqrt{c^2 - v^2} \tag{2.16}$$

反射点の x 座標は $x = vt_1 = \ell_2 v/\sqrt{c^2 - v^2}$ だから

$$\begin{cases} \{x^\mu\}(t, x, y, z) = (\ell_2/\sqrt{c^2 - v^2},\ \ell_2 v/\sqrt{c^2 - v^2}, \ell_2, 0) \\ \{x^{\mu'}\} = (t', x', y', z') = (t'_1, 0, y'_1, 0) \end{cases}$$

よって、(2.3) で $\mu = 0$ の場合に代入すると

$$x_1^{0'} = t'_1 = {\Lambda^{0'}}_0 \frac{\ell_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{0'}}_1 \frac{\ell_2 v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{0'}}_2 \ell_2 \tag{2.17}$$

となり、$\mu = 2$ の場合に代入すると

$$x_1^{2'} = y'_1 = {\Lambda^{2'}}_0 \frac{\ell_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{2'}}_1 \frac{\ell_2 v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^2}_2 \ell_2 \tag{2.18}$$

となる。(2.13) を用いると

$$x_1^{2'} = y'_1 = {\Lambda^{2'}}_2 \ell_2 \tag*{(2.18)$'$}$$

$\mu = 1$ の場合には、R$'$ は y' 軸上にあるから、$x'_1 = 0$ なので

$$0 = {\Lambda^{1'}}_0 \frac{\ell_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{1'}}_1 \frac{\ell_2 v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{1'}}_2 \ell_2 \tag{2.19}$$

ここで、(2.10) を用いると

$$\underline{\underline{{\Lambda^{1'}}_2 = 0}} \tag{2.20}$$

$\mu = 3$ の場合には

$$0 = {\Lambda^{3'}}_0 \frac{\ell_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{3'}}_1 \frac{\ell_2 v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{3'}}_2 \ell_2$$

(2.13) を用いると

$$\underline{\underline{{\Lambda^{3'}}_2 = 0}} \tag{2.21}$$

原点 O$'$ に戻ったとき、$t_2 = 2t_1$、$x_2 = 2x_1$、$y_2 = 0$ だから

$$\bigstar \begin{cases} \{x^\mu\} = (t, x, y, z) = (2\ell_2/\sqrt{c^2 - v^2},\ 2\ell_2 v/\sqrt{c^2 - v^2}, 0, 0) \\ \{x^{\mu'}\} = (t', x', y', z') = (t'_2, 0, 0, 0) \end{cases}$$

よって、$\mu = 0$ の場合に代入すると

$$x_2^{0'} = t'_2 = {\Lambda^{0'}}_0 2\ell_2/\sqrt{c^2 - v^2} + {\Lambda^{0'}}_1 2\ell_2 v/\sqrt{c^2 - v^2} \tag{2.22}$$

時計合わせの方法から $t'_2 = 2t'_1$ なので、(2.17)、(2.22) より

$${\Lambda^{0'}}_0 2\ell_2/\sqrt{c^2 - v^2} + {\Lambda^{0'}}_1 2\ell_2 v/\sqrt{c^2 - v^2} = 2\Big({\Lambda^{0'}}_0 \frac{\ell_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{0'}}_1 \frac{\ell_2 v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + {\Lambda^{0'}}_2 \ell_2\Big)$$

よって

$$\underline{\underline{\Lambda^{0'}{}_2 = 0}} \tag{2.23}$$

$\mu = 2$ の場合には $y'_2 = 0$ だから

$$0 = \Lambda^{2'}{}_0 2\ell_2/\sqrt{c^2 - v^2} + \Lambda^{2'}{}_1 2\ell_2 v/\sqrt{c^2 - v^2}$$

となるが、(2.13) より、この式は成立していることがわかる。
$\mu = 1$ の場合には $x'_2 = 0$ だから

$$0 = \Lambda^{1'}{}_0 2\ell_2/\sqrt{c^2 - v^2} + \Lambda^{1'}{}_1 2\ell_2 v/\sqrt{c^2 - v^2}$$

となるが、(2.11) を用いると、この式も成立していることがわかる。
$\mu = 3$ の場合の式も、(2.13) より成立していることがわかる。

[C] $\underline{\mathrm{R}'\text{ が } z' \text{ 軸上にあり、} O \text{ 系で } \overline{\mathrm{O'R'}} = \ell_3 \text{ である場合。}}$

[**B**] の場合と同様にすると、(2.20)、(2.21)、(2.23) に対応する式として

$$\underline{\underline{\Lambda^{0'}{}_3 = 0, \qquad \Lambda^{1'}{}_3 = 0, \qquad \Lambda^{2'}{}_3 = 0,}} \tag{2.24}$$

が得られる。これまでの結果を用いて (2.3) を具体的に書くと

$$\blacklozenge \begin{cases} t' = \Lambda^{0'}{}_0\Big(t - \dfrac{v}{c^2}x\Big) \\ x' = \Lambda^{1'}{}_1(x - vt) \\ y' = \Lambda^{2'}{}_2 y, \qquad z' = \Lambda^{3'}{}_3 z \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{cases} x^{0'} = \Lambda^{0'}{}_0\Big(x^0 - \dfrac{v}{c}x^1\Big) \\ x^{1'} = \Lambda^{1'}{}_1(x^1 - \frac{v}{c}x^0) \\ x^{2'} = \Lambda^{2'}{}_2 x^2, \qquad x^{3'} = \Lambda^{3'}{}_3 x^3 \end{cases} \tag{2.25}$$

さて、時計合わせの基になる、光速不変の原理を用いよう。[**A**] の場合に、反射点の時刻と x' 座標の関係は O' 系でも光速が c であることより

$$\underline{x'_1 = ct'_1} \tag{2.26}$$

この式に (2.6)、(2.7) を代入し、(2.11)、(2.15) を用いると

$$\underline{\underline{\Lambda^{1'}{}_1 = \Lambda^{0'}{}_0}} \tag{2.27}$$

が得られる。
[**B**] の場合にも反射点までの光の伝播を考えると、

$$y'_1 = ct'_1 \tag*{(2.26)$'$}$$

これより、(2.17)、(2.18)$'$、(2.23)、(2.27) を用いると

$$\Lambda^{2'}{}_2 = \Lambda^{1'}{}_1/\gamma \tag{2.28}$$

が得られる。ここで

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}} \tag{2.29}$$

同様にして、$\underline{\underline{\Lambda^{3'}{}_3 = \Lambda^{1'}{}_1/\gamma}}$ も成り立つ。
以上より、(2.25) はさらに簡単化され、次のようになる：

$$\blacklozenge\ \underline{\underline{t' = \phi(v)\gamma\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big), \quad x' = \phi(v)\gamma(x - vt), \quad y' = \phi(v)y, \quad z' = \phi(v)z}} \tag{2.30a}$$

あるいは

$$\blacklozenge\ \underline{\underline{x^{0'} = \phi(v)\gamma\Big(x^0 - \frac{v}{c}x^1\Big), \quad x^{1'} = \phi(v)\gamma(x^1 - \frac{v}{c}x^0), \quad x^{2'} = \phi(v)x^2, \quad x^{3'} = \phi(v)x^3,}} \tag{2.30b}$$

ここで

$$\underline{\underline{\Lambda^{1'}{}_1 \equiv \gamma\phi(v)}} \tag{2.31}$$

とおいた。

[D] $\phi(v)$ の決定

座標変換を 2 度行う。
O' 系に対して速度 $-\mathbf{v}$ で運動する系 O'' を考える。O'' 系は O 系と同じである。従って、O 系から O' 系に変換し、次に O' 系から O'' 系に変換すれば元の系 O に戻る。
O' 系から O'' 系への変換は (2.30a) において $v \to -v$ とすればよい：

$$x'' = \phi(-v)\gamma(x' + vt'), \quad y'' = \phi(-v)y', \quad z'' = \phi(-v)z', \quad t'' = \phi(-v)\gamma\Big(t' + \frac{v}{c^2}x'\Big) \tag{2.32}$$

ここで、y 座標について見ると

$$y'' = \phi(-v)y' = \phi(-v)\phi(v)y$$

$y'' = y$ だから

$$\underline{\phi(v)\phi(-v) = 1} \tag{2.33}$$

◇ 棒の長さと空間の等方性

O' 系の y' 軸上におかれた長さ ℓ の棒を考える。棒の一端が原点にあるとすると、棒の他端の座標は $y' = \ell$ である。O 系における棒の長さは、棒の両端の (同時刻における)y 座標の差である。棒の下端の y 座標は 0、上端の y 座標は、座標変換より

$$y' = \phi(v)y \qquad よって \qquad y = y'/\phi(v) = \ell/\phi(v)$$

従って、O 系における棒の長さは $\ell/\phi(v)$ である。

S 系から見て $-\mathbf{v}$ で運動する座標系を考える。同じ棒が、この系の y 軸上におかれていると

する。棒の長さを O 系から見ると、同様にして、$\ell/\phi(-v)$ である。O 系から見たとき、2 つの場合の違いは棒の運動方向だけである。空間は等方的なので、2 つの場合に棒の長さは同じはずである。従って

$$\ell/\phi(v) = \ell/\phi(-v) \qquad \text{よって} \qquad \phi(v) = \phi(-v) \tag{2.34}$$

(2.33)、(2.34) から

$$\underline{\phi(v) = \pm 1} \tag{2.35}$$

$t = 0$ のとき、2 つの座標軸は一致するから、$+1$ をとらなければならない。(*)
以上から、座標変換は最終的に次のようになる：

$$\boxed{t' = \gamma\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z} \tag{2.36a}$$

あるいは

$$\boxed{x^{0'} = \gamma\Big(x^0 - \frac{v}{c}x^1\Big), \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \frac{v}{c}x^0), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3} \tag{2.36b}$$

相対速度 $\mathbf{v}$ に垂直な方向は変換されないことに注意。
(2.36) で表される変換を **Lorentz 変換**という。

(*) 次のような理由が用いられることが多い：

$\phi(v)$ は v について連続的に変わる。$v = 0$ のときは O 系 $= O'$系 であり、変換は恒等変換である。よって、$v \to 0$ のとき $\phi(v) \to 1$ となる。従って、$\phi(v) = 1$ でなければならない。

◇ 座標について

(2.2) 式では、$t \equiv x^0$ としたが、その次元は x^1, x^2, x^3 とは異なる。ct を座標として、4 つの座標の次元をすべて長さにする仕方がよく用いられる。

$$\boxed{(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)} \tag{2.2$'$}$$

◇ **逆変換**: O' 系から O 系への変換

2 つの系は同等なので、逆変換も同様にして求めることができる。この場合と前の場合の違いは、O' 系から見た O 系の速度が v ではなく、$-v$ であるということだけである。従って、求める変換は (2.36) の場合と同様に

$$\boxed{ct = \gamma\Big(ct' + \frac{v}{c}x'\Big), \quad x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z'} \tag{2.37}$$

問 (2.37) を上付きの番号を用いて座標を表す記法で書いてみよ。

なお、(2.36) のローレンツ変換は行列を用いて、次のようにのように表されることも多い。

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}} \tag{2.38}$$

ここで

$$\boxed{\beta \equiv \frac{v}{c}} \tag{2.39}$$

問　(2.36) あるいは (2.38) で実際に変換されるのは 0 成分と 1 成分だけである。この成分だけの変換式を行列で表してみよ。

Chapter 3

ローレンツ変換からの帰結

ローレンツ変換は光速不変の原理を満たす変換として求められた。ガリレイ変換では光速が変換されるから、ローレンツ変換による速度の変換はガリレイ変換と異なる。また、2 つの出来事が同時であるかどうかは、座標系によった。このことは時間の長さ (間隔) も、座標系によることを意味している。さらに、ローレンツ変換では、時間と空間座標が変換しあうので、このことは、空間の 2 点間の距離あるいは物体の長さも座標系によることが予想される。これらのことについて以下で調べよう。

3.1　速度の変換 (合成)

速度の変換はいくつかの方法で求めることができるが、ここではローレンツ変換と速度の定義のみを用いて求めよう。まず、4 次元的な変位 dx^μ の変換は座標 x^μ の変換と同じであることに注意する。すなわち、O 系から見て x 方向に速さ v で進む系 O' への変換は

$$\boxed{dx^{0'} = \gamma(dx^0 - \beta dx^1), \quad dx^{1'} = \gamma(dx^1 - \beta dx^0), \quad dx^{2'} = dx^2, \quad dx^{3'} = dx^3} \tag{3.1}$$

逆変換は

$$\underline{dx^0 = \gamma(dx^{0'} + \beta dx^{1'}), \quad dx^1 = \gamma(dx^{1'} + \beta dx^{0'}), \quad dx^2 = dx^{2'}, \quad dx^3 = dx^{3'}} \tag{3.2}$$

いま、xy 平面 ($= x'y'$ 平面) 内で運動する粒子を考える。O 系での速度の成分は

$$\underline{\underline{V^1 = \frac{dx^1}{dt}, \quad V^2 = \frac{dx^2}{dt}}} \tag{3.3a}$$

O' 系での速度の成分は

$$\underline{\underline{V^{1'} = \frac{dx^{1'}}{dt'}, \quad V^{2'} = \frac{dx^{2'}}{dt'}}} \tag{3.3b}$$

(3.3a) に (3.1b) を代入し、$dx^0 = cdt$、$dx^{0'} = cdt'$ に注意すると

$$V^1 = \frac{\gamma(dx^{1'} + \beta dx^{0'})}{\gamma(dx^{0'} + \beta dx^{1'})/c} \quad V^2 = \frac{dx^{2'}}{\gamma(dx^{0'} + \beta dx^{1'})/c}$$

右辺の分母分子を $dx^{0'}$ でわると

$$V^1 = \frac{dx^{1'}/dx^{0'} + \beta}{(1 + \beta dx^{1'}/dx^{0'})/c}, \quad V^2 = \frac{dx^{2'}/dx^{0'}}{\gamma(1 + \beta dx^{1'}/dx^{0'})/c}$$

従って

$$\boxed{V^1 = \frac{V^{1'} + v}{1 + vV^{1'}/c^2}, \qquad V^2 = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{V^{2'}}{1 + vV^{1'}/c^2}} \tag{3.4}$$

<u>速度は、相対速度に垂直な成分も変換される！</u>

問　V^3 の変換はどのようになるか。

■ ローレンツ変換を 2 度行うことによって求める方法 (2 つの速度が平行なとき)

O 系に対して O' 系は x 方向に速さ v で進み、O' 系に対して O'' 系は x' 方向に v' で進むとする。また、O 系に対して O'' 系は x 方向に速さ v'' で進むとする。

$$\begin{array}{ccccc} O\,\text{系} & \longrightarrow & O'\,\text{系} & \longrightarrow & O''\,\text{系} \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & x\,\text{方向に速さ}\,v & & x'\text{方向に速さ}\,v' & \end{array}$$

y, z 座標は変換されないので、変換される座標だけ書くと、O 系から O' 系への変換は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c \\ -\gamma v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

同様にして、O' 系から O'' 系への変換は

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma' v'/c \\ -\gamma' v'/c & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

これらより、O 系から O'' 系への変換は

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma' v'/c \\ -\gamma' v'/c & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c \\ -\gamma v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

となる (最初の変換の行列が <u>右側</u>)。行列の計算をすると

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma'(1 + vv'/c^2) & -\gamma\gamma'(v + v')/c \\ -\gamma\gamma'(v + v')/c & \gamma\gamma'(1 + vv'/c^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

これはまた、O 系から見て O'' 系の速さが v'' であるとすると、次のようにも書ける:

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'' & -\gamma'' v''/c \\ -\gamma'' v''/c & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

最後の 2 式の行列を比べて、次の関係が得られる：

$$\boxed{v'' = \frac{v + v'}{1 + vv'/c^2}} \tag{3.4$'$}$$

問　$(3.4)'$ を β, β', β'' を用いて表すとどのようになるか。

☆ 光速の不変性について

粒子が光子のとき、(3.4) で $V^{1'} = c,\ V^{2'} = 0$ とすると、確かに $V^1 = c$ となり、光速は不変である。一般に、$V^{1'} < c, V^{2'} = 0$ ならば

$$c - V^1 = c\,\frac{(1 - V^{1'}/c)(1-\beta)}{1 + vV^{1'}/c^2} > 0$$

すなわち、粒子の速さがある座標系で光速以下ならば、どの座標系でも光速以下になる。

問　$V^{1'} < c,\ V^{2'} \neq 0$ のときにも、$c^2 - \mathbf{V}^2 > 0$ となることを確かめよ。

3.2　4 次元時空

ローレンツ変換では、時間と空間座標は互いに混ざり合う。そこで、時間と空間を別々のものではなく、4 つの $\{x^\mu\}$ を座標とする 4 次元空間を導入することが、ミンコフスキーによって提案された。この 4 次元空間を用いるといろいろなことの見通しがよくなることがわかった。また、特殊相対論では重力を扱うことができないが、重力を相対論的に扱うための一般相対論へ進むには 4 次元空間はなくてはならない舞台である。この 4 次元空間は、**4 次元時空 (あるいは、単に時空)、(4 次元) 世界、ミンコフスキー空間 (時空)** などと呼ばれる。以下では、常に 4 次元を考えるので、単に時空ということにする。この空間の性質と、物体の運動をこの空間を用いて表す方法について調べよう。

3.2.1　事象 (event)、あるいは、世界点

時空の点は、時刻と場所 (何時何処で) を表し、**event** あるいは **world point** といわれ、日本語では、**事象**あるいは**世界点**とよばれる。この点を表す座標が $\{x^\mu\}$ であったが、通常の 3 次元空間の点の座標と同様に、座標系によって座標値は異なる。異なる座標系 (慣性系) における座標値の関係を表すのがローレンツ変換であった。O 系の x 方向に、速さ v で進む系 O' へのローレンツ変換は

$$\boxed{x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3} \tag{3.5}$$

であった。『**時空の原点の座標は変換されない**』場合であることに注意せよ。従って、(3.5) のローレンツ変換は、通常の 3 次元空間における変換では原点のまわりの回転に対応する、時空における“ 回転 ”(“　　”の意味は後出) と考えることができる。

3.2.2　(不変) 距離

通常の 3 次元空間では、2 点間の距離は座標系を回転 (原点のまわりでなくてもよい) しても変わらない。言い換えれば、2 点間の距離は座標系の回転に対して**不変量**になっている。不変量は座標変換を考えるときには便利な量である。

『時空における 2 点間の距離もローレンツ変換で不変である』

ように定義できないであろうか。この問題についても、光速不変の原理が指針になる。

『系 O と O' の共通の時空の原点から光 (球面波) を出す』

場合を考えよう。O 系で見るとき、時間が t たつと、光は半径 ct の球面に達するから、この球面上の 1 点の座標を (x, y, z) とすると

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad \text{あるいは} \quad \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 - (x^0)^2 = 0 \tag{3.6a}$$

が成り立つ (ローマ字の添字は 1,2,3 を表す)。O' 系で見ても、光の速さは c であるから、同様にして

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad \text{あるいは} \quad \sum_{i=1}^{3}(x^{i'})^2 - (x^{0'})^2 = 0 \tag{3.6b}$$

が成り立つ。ここで

$$\boxed{s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 - (x^0)^2} \tag{3.7}$$

を定義すると、(3.6a,b) は、『$s^2 = 0$ が成り立てば、$s'^2 = 0$ が成り立つ』ことを表している。光の波面上にない点に対しては、$s^2 \neq 0$ であるが、$s^2 = s'^2$ となっていないであろうか。ローレンツ変換 (3.5) を用いると、このことが成立していることが確かめることができる。

問　(3.5) を用いて $s^2 = 0$ ならば $s'^2 = 0$ であることを示せ。

すなわち、s^2 **はローレンツ変換に対して不変量**である。そこで、s^2 を時空の原点とある事象の間の **(不変) 距離**（あるいは**間隔** (interval) ということも多いので以下では後者を用いることもある）の 2 乗と定義する。一般の 2 点 (x_1, y_1, z_1, ct_1) および (x_2, y_2, z_2, ct_2) に対しては、その相対ベクトルを

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ct_2 - ct_1) \equiv (\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t)$$

とすると、2 点間の距離の 2 乗は

$$\boxed{(\Delta s)^2 = (\Delta \mathbf{x})^2 - (c\Delta t)^2 = \sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2 - (\Delta x^0)^2} \tag{3.8}$$

となる。(3.7) あるは (3.8) は距離の 2 乗ではあるが、<u>正とは限らず、負にも 0 にもなる</u>。

3.2.3　時間的、空間的、ヌル的；光円錐

さて、(3.7) の s^2 で与えられる、ある事象と時空の原点との距離の 2 乗は不変量であった。このことを用いて、事象 (世界点) を座標系によらない方法で、次のように分けることができ

きる：

$$
\boxed{\begin{array}{lll}
\text{時間的事象} & \cdots & s^2 < 0 \text{ である事象} \\
\text{空間的事象} & \cdots & s^2 > 0 \text{ である事象} \\
\text{ヌル的事象} & \cdots & s^2 = 0 \text{ である事象}
\end{array}}
$$

時間的事象全体からなる時空の領域を (時空の原点に関して) **時間的領域**という。同様に、空間的事象全体の領域を**空間的領域**という。また、ヌル的事象全体を (原点を頂点とする) **光円錐**という。

このような分類の意味を考えてみよう。時空の原点から空間的な事象 (ct, x, y, z) まで粒子が等速度で移動したとしよう、すなわち、時刻 0 に空間の原点から出た粒子が等速度で進み、時刻 t に空間座標が (x, y, z) である空間の点に達したとしよう。このときの速さ v は

$$
v = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t}
$$

である。$s^2 > 0$ だから $x^2 + y^2 + z^2 > (ct)^2$ であり

$$
\underline{v > c}
$$

である。このような粒子は**タキオン** (tachyon) といわれる。通常の粒子は、光速以下の速さから光速まで加速するのに、無限大のエネルギーが必要なので (後出)、それ以上の速さにはもちろん加速できない。従って、通常の粒子は空間的に離れた 2 つの事象を移動できない。すなわち、

『**空間的に離れた 2 つの事象は互いに影響しあうことはできない** (因果関係はない)。』

実際、空間的に離れた 2 つの事象は、それらが同時である座標系が存在する (これも後出)。タキオンの存在は理論的には否定できない。これまで多くの「タキオン探し」が行われてきたが、未だに見つかっていない。(これまでのタキオン探しの方法についても後出？)

これに対して、時間的な事象へは時空の原点から粒子が光速よりも遅い等速度で移動できる。あるいは、その事象から時空の原点へ粒子が光速よりも遅い等速度で移動できる。(前者は、もちろん、$t > 0$ の場合で、後者は $t < 0$ の場合である。) 従って、

『**時間的に離れた 2 つの事象は互いに影響しあうことが可能である** (因果関係が可能である)。』

また、光円錐は時空の原点から出た光が到達できる、あるいはその事象からでた光が原点に到達できる事象全体である。光円錐は時間的領域と空間的領域の境になっている。時間的領域は光円錐の内部、空間的領域は外部である。

3.3 時空図

時空における粒子や物体の運動を図示することを考えよう。この図を**時空図**という。時空は 4 次元なので、紙面上に表すことはできない。そこで

『空間の次元は、さしあたり 1 次元だけを図示することにする。』

いま、ある慣性系、O 系、における時間軸 (x^0 軸) と x 軸 (x^1 軸) だけを図示することにしよう。事象は時空図中の 1 点 (P で表す) で表される。この点は、ある粒子のある時刻における位置を表している。**粒子の運動**は、各時刻における粒子の位置全体で表されるから、時空図中の曲線で表される。この曲線を粒子の**世界線**という (このことはもちろん次元によらない)。

等速度運動する粒子を考えよう。時間 (x^0) と x 座標との関係は、粒子の速度を v とすると

$$x = vt \quad \Rightarrow \quad x^0 = (c/v)x = (c/v)x^1 \tag{3.9}$$

であるから、傾き $c/v = 1/\beta$ が 1 より大きい直線である。すなわち、

『**等速度運動をしている粒子の世界線は直線である**。』

特に粒子が光子 (光) のときは

$$x^0 = x^1$$

だから

『**光子 (光) の世界線は 2 つの座標軸の 2 等分線である**。』

光子は光円錐上を進むから、いま考えている時空図では光円錐は座標軸と 45° をなす直線で表されることになる。

[図 3.1 時空図]

◇ O' **系の座標軸**

x' 軸は $t' = 0$ となる直線であるから、(3.1a) から

$$x^0 = \beta x^1 \tag{3.10a}$$

となり、傾きが $\beta < 1$ の時空図の原点を通る直線である。t' 軸は $x' = 0$ となる直線であるから、(3.1a) から

$$x^0 = (1/\beta)x^1 \tag{3.10b}$$

となり、傾きが $1/\beta > 1$ の時空図の原点を通る直線である。

$x' = 0$ となる点は、O' 系では、空間の原点に静止している。従って、

『t' 軸は O' 系の原点に置いてある時計、あるいは原点にいる観測者の世界線である。』

(3.10a) および (3.10b) から、

<u>$t(x^0)$ 軸と $t'(x^{0'})$ 軸のなす角度と $x(x^1)$ 軸と $x'(x^{1'})$ 軸のなす角度は等しい</u>

ことが分かる。従って、光円錐は t' 軸と x' 軸の 2 等分線でもあることに注意。

☆ 不変双曲線

O 系の t-x 面上で双曲線

$$(ct)^2 - x^2 = a^2 \quad \text{あるいは} \quad (x^0)^2 - (x^1)^2 = a^2 \tag{3.11a}$$

を考えよう。この双曲線は時空中の 1 つの決まった曲線である。$(x^0)^2 - (x^1)^2$ は不変量だから、この双曲線は O' 系でも同じ形の式で表される：

$$(ct')^2 - x'^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = a^2 \tag{3.11b}$$

それで、この双曲線は**不変双曲線**と呼ばれる。この双曲線と ct 軸および ct' 軸との交点は、それぞれ

$$ct = a \quad \text{および} \quad ct' = a, \quad \text{あるいは} \quad x^0 = a \quad \text{および} \quad x^{0'} = a \tag{3.12}$$

である。特に、$a = 1$ とすると、$ct(x^0)$ 軸および $ct'(x^{0'})$ 軸との交点の**目盛りは共に 1** である。なお、この双曲線の漸近線は次の光円錐である：

$$ct = \pm x \quad \text{あるいは} \quad x^0 = \pm x^1$$

[図 3.2 不変双曲線と座標目盛り]

O 系の t-x 面上で双曲線が

$$(ct)^2 - x^2 = -b^2 \quad \text{あるいは} \quad (x^0)^2 - (x^1)^2 = -b^2 \tag{3.13}$$

である場合にも、前と同様に、この双曲線と $x(x^1)$ 軸および $x'(x^{1'})$ 軸との交点は、それぞれ

$$x = b \quad \text{および} \quad x' = b, \quad \text{あるいは} \quad x^1 = b \quad \text{および} \quad x^{1'} = b \tag{3.14}$$

である。特に、$b = 1$ とすると、$x(x^1)$ 軸および $x'(x^{1'})$ 軸との交点の**目盛りは共に 1** である。このように不変双曲線を利用して、座標軸上に目盛りを付けることができる。

3.4　ローレンツ収縮

ある座標系における物体 (棒) の長さは、その両端の間の距離であり、その座標系に静止している物差しを用いて測られた。棒が運動しているときには、棒の長さはどのように測ればよいであろうか：

『運動している棒に静止した物差しを当てて長さを測ることはできない。』

そこで、次のように運動している棒の長さを定義する：

『ある時刻における棒の両端の**位置**を**同時に**測り (位置に印を付け)、その 2 点間の距離を物差しで測る。』

もちろん、棒が静止していれば、この測り方は前のものと同じであることがわかるであろう。運動している物体の長さの測り方をこのようにすると、物体の長さはその速度によって異なって見えることになる。このことについて、時空図を用いて調べてみよう。

O 系から見て、棒は速さ v で運動しているとする。棒と同じ速度で運動している系を O' とし、この系での棒の長さを ℓ とする。棒は x' 軸上に、左端が原点にあるように置かれているとする。従って、棒の右端の位置は $x' = \ell$ にある。O 系の時空図に、棒の両端の世界線および O' 系の座標軸を描く。棒の左端の世界線と t' 軸は一致する。時空の原点を O、棒の右端の世界線と x' 軸および x 軸との交点の事象を、それぞれ、A、B とする。

[図 3.3　運動している棒の長さを測るための時空図]

A の O' 系における座標は、$t' = 0,\ x' = \ell$ である。このとき、静止している棒の長さの測り方より

$$\boxed{O'\text{系における棒の長さ} = \ell = \sqrt{(\Delta s_{\mathrm{OA}})^2}\ :\ \text{事象}\ O, A\ \text{間の不変距離 (間隔)}} \tag{3.15a}$$

同様にして、O 系における事象 B の座標のうち $t = 0$ であり、また、x 座標を x_B とすると、運動している棒の長さの測り方より (事象 O、A は O 系では同時)

$$\boxed{O\ \text{系における棒の長さ} = x_B = \sqrt{(\Delta s_{\mathrm{OB}})^2}\ \text{：事象}\ O, B\ \text{間の不変距離 (間隔)}} \tag{3.15b}$$

さて、事象 A を通る不変双曲線

$$-(ct)^2 + x^2 = \ell^2$$

を時空図に描こう。この双曲線は棒の右端の世界線に接しているので、明らかに

$$\boxed{x_B < \ell}$$

である。すなわち、O 系では、O' 系よりも棒は短く見える。どのくらい短く見えるかを見るために、x_B を求めよう。事象 B の x' 座標は $x'_B = \ell$ である (棒は O' 系では静止しているから、$x'_B = x'_A = \ell$)。従って、ローレンツ変換から

$$x'_B = \ell = \gamma(x_B - vt_B)$$

$t_B = 0$ だから

$$\boxed{x_B = \ell/\gamma = \ell\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{3.16}$$

この、運動している物体は運動方向には短く見えることを、**ローレンツ収縮**という。

(*) 棒全体の運動は時空図上では、面 (斜線部) で表される。この面を、棒の**世界面**という。

3.5 時間の遅れと固有時

3.5.1 時間の遅れ

運動している時計は進み方が変わるであろうか。変われば、一度合わせた時計は移動させると「くるって」しまうことになる。このことを調べるために、O 系から見て速さ v で x 方向に運動している時計を考えよう。時計は $t = t' = 0$ に原点を通るとする。

図 3.4 時間の遅れを調べるための時空図

S 系の時空図に、時計の世界線、時計と共に運動する系、O' 系、の座標軸を描こう。時計の世界線と t' 軸は一致する。t' 軸上にある事象 A を考える。O' 系では、事象 A の x' 座標は $x'_A = 0$ だから、事象 A の時刻は原点に置かれた時計で計る。この時刻を t'_A とする。時計が

$t'=0$ に原点を通過するということは、時空図上では時計の世界線が時空図の原点 O(これも 1 つの事象を表す) を通るということである。従って、t'_A は 2 つの事象 O、A 間の O' 系における **1 つの時計**で計られた時間間隔であり、不変距離を用いて表すと

$$\boxed{O'\text{系における事象 O,A 間の時間} = t'_A = \sqrt{-(\Delta s_{OA})^2} : O, A \text{ 間の不変距離}} \tag{3.17a}$$

他方、O 系では、事象 A の x 座標を x_A とすると、事象 A の時刻は $x=x_A$ に置かれた時計で計る。従って、O 系における事象 O、A 間の時間は、原点 ($x=0$ の点) に置かれた時計と $x=x_A$ に置かれた **2 つの時計**で計る。さて、O 系で、A と同時である t 軸上の事象を B としよう。B の O 系での時刻を t_B とすると、もちろん、$t_B=t_A$ であり、原点に置かれた時計で計られる (事象 O の時計と同じ)。上と同じく、t_B は事象 O、B 間の不変間隔で表されるから次のようになる：

$$\boxed{O\text{ 系における事象 O、A 間の時間} = t_A = t_B = \sqrt{-(\Delta s_{OB})^2} : O, B \text{ 間の不変距離}} \tag{3.17b}$$

さて、事象 A を通る不変双曲線

$$(ct)^2 - x^2 = (ct'_A)^2$$

を描こう。この双曲線と t 軸との交点を C とすると、O 系における事象 C の時刻は、$x_C=0$ だから、t'_A である。従って、明らかに

$$\underline{\underline{t_A > t'_A}}$$

この結果はよく、

『運動している時計は進み方が遅い。』

と表される。これを言い換えると、

『時計が静止している系の時間は時計が運動している系の時間より進みが遅い。』

ということである。進み方の違いを見るために、O' 系から O 系へのローレンツ変換する。事象 A について

$$t_A = \gamma(t'_A + vx'_A)$$

$x'_A=0$ だから

$$\boxed{t_A = \gamma t'_A \quad \text{あるいは} \quad t'_A = t_A/\gamma} \tag{3.18}$$

3.5.2　固有時

上で見たように、事象間の時間は座標系によって異なる。しかし、1 対の事象に多数の時間を割り当てるのでは不便である。例えば、放射性物質の半減期については、実際には 1 つの

時間が割り当てられていて、種々の物質について、半減期は表にまとめられている。この表に記されている半減期はどのような座標系で測られるものであろうか (*)。最も簡単なのは、一番短い時間 (進み方が一番遅い時計で測った時間) で表すことであろう。時間の遅れを考えた場合と対応させれば、放射性物質と共に動く系、すなわち、放射性物質が静止している系で測った時間が一番短いことになる。この座標系を放射性物質の**静止系** (rest frame) あるいは**共動座標系** (comoving frame) という。

また、粒子が空間の 2 点 P、Q 間を移動する時間も座標系によって異なる。この場合にも、粒子と共に動く座標系、すなわち、粒子の静止系あるいは共動座標系での時間が一番短い。この 一番短い時間、すなわち、静止系あるいは共動座標系で測った時間 を放射性物質あるいは粒子の**固有時間**といい、τ で表すことが多い。静止系では、$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ だから

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 \equiv -(c\Delta\tau)^2 \quad \text{あるいは} \quad (c\Delta\tau)^2 = -(\Delta s)^2 \tag{3.19}$$

静止系では、定義から $\Delta\tau = \Delta t$ であるが、一般の座標系では

$$(c\Delta\tau)^2 = -(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c\Delta t)^2 \left[1 - (\Delta x)^2/(c\Delta t)^2\right]$$

従って

$$\boxed{\Delta\tau = \Delta t \left[1 - (v/c)^2\right]^{1/2} = \Delta t/\gamma \quad \text{あるいは} \quad \Delta t = \gamma\Delta\tau} \tag{3.20}$$

(*) 放射性物質は高速度で移動することはないから、実際には相対論的な効果は考慮する必要はない。しかし、粒子の場合には、例えば高エネルギーの宇宙線は地球に飛来すると、空気の原子核と衝突し、高度数千メートルの上空で高エネルギーの多数の粒子を作るが、これらの粒子に対しては相対論的な効果が大きい。作られた粒子の内、μ 粒子 (衝突で直接作られた π 中間子が崩壊してできる) は地表まで達するものが多数あるが (空気シャワーの成分)、その平均寿命は 2.20× 10^{-6}sec(=2.20μsec) である。
従って、その速さがほとんど光速としても、相対論的効果を考えなければ、

$$c \times 2.20 \times 10^{-6}\text{秒} = 660\text{m}$$

しか進めず、とても地表までは達しない。しかし、多くの μ 粒子が 100∼1000 の γ 因子を持ち (運動すると寿命が延びて)、地表まで達する。

3.5.3 瞬間静止系あるいは瞬間共動座標系 (MCR 系)

粒子が一定の速度ではなく、例えば、加速器中のように、円運動をしているとその寿命はどうなるであろうか。この問題は高エネルギー実験を精度よく行うためには重要な問題である。次のように考えられることが実験的に確かめられている：

O 系の各時刻 t において、微小時間 dt だけ粒子と同じ速度 $\mathbf{v}(t)$ をもつ慣性系を考える。この慣性系を瞬間静止系あるいは瞬間共動座標系という。瞬間静止系での時間を $d\tau(t)$ とすると、これを固有時間とすることができ、全寿命はこの固有時間の和

$$\underline{\tau = \int d\tau(t)} \tag{3.21a}$$

で与えられる。O 系での計算は次のように与えられる：

$$\underline{\tau = \int dt/\gamma(t), \qquad \gamma(t) = \left[1 - (v(t)/c)^2\right]^{-1/2}} \tag{3.21b}$$

(＊) 高エネルギー物理学では、粒子の γ 因子が 1 以上になることは特別なことではなく、10^4 になる場合もある (電子-陽電子正面衝突実験)。従って、相対論が必要になる (実際上唯一の分野である)。このような高いエネルギーにするには、上記のように粒子を円運動させながら加速する。粒子の中には不安定な (有限の寿命を持つ) ものもある。従って、このような粒子線の強さを正確に扱うには、MCR 系という考え方がキー・ポイントである。実際、MCR 系を用いた計算に基づいて作られた加速器は正確に作動している。

問　地球から距離 l のところにある宇宙ステーションまで、一定の早さ v のロケットで行ったとする。時間 Δt かけてロケットを乗り換え、行きと同じ早さのロケットで地球に戻るとする。また、ロケットの加速、減速は瞬間的になされるとする。
(1) この飛行士の世界線を時空図上に描け。
(2) この飛行士が地球を出発してから地球に戻るまでの固有時間はいくらか。

Chapter 4

物理量とその座標変換(ローレンツ変換)

相対性原理は

『**物理法則を表す式はすべての慣性系で同じ形である。**』

ことを要請する。物理法則は種々の物理量の間の関係を与えるから、この要請を満たすようにするには、物理量の座標変換を知らなければならない。座標変換は物理量によって異なるので、変換性によって物理量を分類しよう。

4.1 スカラー、あるいは、不変量

その値が座標系によらない量、すなわち、どの座標系でも同じ値をもつ量、を**スカラー**あるいは**不変量**という。

例

(i) (不変) 距離 (間隔ともいった、**物理的距離**ということもある)

これは (3.8) で定義されたが、再度記すと

$$(\Delta s)^2 \equiv -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad \text{あるいは} \quad (\Delta s)^2 \equiv -(\Delta x^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2 \tag{4.1a}$$

Δ の代わりに d を用いて、次のようにも表す (これからはこの方が多い):

$$ds^2 \equiv -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{あるいは} \qquad ds^2 \equiv -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 \tag{4.1b}$$

(ii) 固有時間

(3.19) で定義されたが、これも再度記すと

$$\Delta\tau^2 \equiv -\frac{1}{c^2}\Delta s^2 \qquad \text{あるいは} \qquad d\tau^2 \equiv -\frac{1}{c^2}ds^2 \tag{4.2}$$

固有時間 $d\tau$ と座標時間 dt の関係は 3 次元の座標をすべて用いると:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = dt^2\Big[1 - \frac{1}{c^2}\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\Big] = dt^2\Big[1 - \frac{1}{c^2}v^2\Big] = (dt/\gamma)^2$$

よって、(3.20) と同じく

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{4.3}$$

従って、$v = 0$ のとき $d\tau = dt$ となる。すなわち、静止している時計で計った時間が固有時間であった。

(iii) 質量 (あるいは、**静止質量**) m

(iv) 電気素量 e

4.2 ベクトル

4.2.1 ベクトルの定義

4 個の順序が付けられた数 V^μ, $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ の集まりで、座標変換が座標 x^μ、あるいは、変位 dx^μ と同じである、すなわち、一般に O 系から O' 系への変換で、(2.3b) のように

$$\boxed{V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\lambda} V^\lambda} \tag{4.4}$$

と変換するものを (**4 元**) **ベクトル** (あるいは (**4 元**) **反変ベクトル**) という。特に、O' 系が O 系の x 方向に速さ v で進む場合には、(2.36) あるいは (3.1a) のように

$$\boxed{V^{0'} = \gamma(V^0 - \beta V^1), \quad V^{1'} = \gamma(V^1 - \beta V^0), \quad V^{2'} = V^2, \quad V^{3'} = V^3} \tag{4.5}$$

のように変換される。各 V^μ をベクトルの**成分**という。成分を用いてベクトルを表すときは次のように記す

$$V = (V^0, V^1, V^2, V^3) \tag{4.6a}$$

もちろん、4 個の座標の組 ($\{x^\mu\}$ と記すことが多い) および変位の組 ($\{dx^\mu\}$ と記すことが多い) はベクトルの例である。これらのベクトルを、それぞれ、位置ベクトルおよび変位ベクトルと呼ぶことにし、記号 $\vec{x}$ および $d\vec{x}$ で表そう。(その場合には、V を $\vec{V}$ と記すこともある。) 各 x^μ および dx^μ が、それぞれ、成分である。

ベクトルは説明文中では (4.6a) のように、行ベクトル (あるいは、1×4 行列) で表すと都合がよいが、式中、あるいは、計算をするときには列ベクトル (あるいは、4×1 行列) を用いて

$$V = \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} \tag{4.6b}$$

のように表すと便利なことが多い。(4.6a) の表し方は、下付の添え字を持つベクトル – 共変ベクトルという (後出)– の場合に用いられることが多い。

4.2.2　ベクトルの和

2 つのベクトル V_1 および V_2 の和 $V_1 + V_1$ はその成分が V_1 の成分と対応する V_2 の成分の和で与えられるものと定義する：

$$\underline{(V_1 + V_2)^\mu \equiv V_1^\mu + V_2^\mu} \tag{4.7}$$

$(V_1 + V_2 = V$ とおくと、$V^\mu = V_1^\mu + V_2^\mu$ ということ$)$

問　このように定義されたベクトルの和はベクトルであることを示せ。

4.2.3　ベクトルのスカラー倍

ベクトル V とスカラー a の積 aV をその成分が

$$\underline{(aV)^\mu \equiv aV^\mu} \tag{4.8}$$

となるものと定義する。すなわち、ベクトルをスカラー倍すると、ベクトルの各成分がスカラー倍される。ベクトルのスカラーでのわり算は、ベクトルとそのスカラーの逆数の積である。

問　aV がベクトルであることを示せ。

4.2.4　ベクトルの基底

さて、4 個のベクトルで、ある慣性系 O での成分が

$$\boxed{e_0 = (1,0,0,0), \quad e_1 = (0,1,0,0), \quad e_2 = (0,0,1,0), \quad e_3 = (0,0,0,1)} \tag{4.9}$$

となるものを考えよう。この e_α($\vec{e}_\alpha$とも記す) は、O 系の α 軸方向の単位ベクトルである (例えば、e_0 は時間軸方向の単位ベクトル、e_1 は x 軸方向の単位ベクトル)。このとき、任意のベクトル V は、これらのベクトルの **1 次結合**、あるいは、**線形結合**を用いて、

$$\boxed{V = \sum_{\alpha=0}^{3} V^\alpha e_\alpha \equiv V^\alpha e_\alpha} \tag{4.10}$$

と表す (ベクトルを基底で展開する) ことができる。このような 4 個のベクトルの組を (ベクトルの) **基底**といい、各ベクトルは**基底ベクトル**という。また、V^α はこの基底に関する成分といわれる。
位置ベクトル $\vec{x}$ および変位ベクトル $d\vec{x}$あるいは$\Delta\vec{x}$ の展開は、それぞれ次のようになる

$$\underline{\vec{x}(\text{あるいは単に } x) = x^\alpha e_\alpha \quad \text{および} \quad d\vec{x}(\text{あるいは単に } dx) = dx^\alpha e_\alpha} \tag{4.11}$$

(*) 少し細かなことをいうと、(4.9) の 4 個のベクトルの組は基底の例の 1 つで、各基底ベクトルが座標軸方向を向いているので**座標基底**と呼ばれる。ベクトルはその成分の座標変換を

用いて定義されたが、このときの成分は実は座標基底に関する成分である。一般には、任意の 4 個の 1 次独立なベクトルの組を基底にとることができるが、以後も特に断らない限り座標基底を用いる。

◇ 一次独立

n 個のベクトル $V_i,\ i=1,\dots,n$ と n 個のスカラー $a_i,\ i=1,\dots,n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i V_i = 0$$

となるのは

$$a_i = 0,\quad 1 =, 2, \dots, n$$

である場合に限られるとき、n 個のベクトル V_i は**一次独立**であるという。4 成分のベクトルの場合には、一次独立なベクトルの数 ≤ 4 である。一次独立な 4 個のベクトルの組を、$\xi_\alpha,\ \alpha = 0,1,2,3$ とすると、任意のベクトル V は

$$V = \sum_{\alpha=0}^{3} c^\alpha \xi_\alpha = c^\alpha \xi_\alpha$$

と表せる。この場合、c^α $(\alpha = 0,1,2,3)$ は、基底 $\{\xi_\alpha\}$ に関する成分という。

問　4 個の e_α の組は 1 次独立であることを示せ。

問　$(e_\alpha)^\mu(e_\alpha\text{の}\mu\text{成分}) = \delta^\mu_\alpha(\text{クロネッカーのデルタ})$ であることを確かめよ。

4.2.5　4 元ベクトルの大きさ

ベクトルは、座標の組 $\{x^\mu\}$ あるいは変位を表す座標の差の組 $\{dx^\mu\}$ と同じ座標変換をするものとして定義された。これらからは、不変距離、例えば (4.1)、としてスカラーが作れる。このことを参考にした、通常の 3 次元ベクトルの大きさ (3 次元ベクトル解析でスカラーであった！) に対応する 4 元ベクトル V の**大きさ** (の 2 乗、$V \cdot V$ あるいは V^2 と記される) を

$$\boxed{V \cdot V \equiv -(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 = -(V^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(V^i)^2} \tag{4.12}$$

と定義すると、これはスカラー (不変量) である。

問　$V \cdot V$ がスカラーであることを確かめよ。

4.2.6　4 元ベクトルのスカラー積

V_1、V_2 を 2 つの 4 元ベクトルとする。これらの和 $V_1 + V_2$ も 4 元ベクトルであった。この和の大きさ $(V_1+V_2)\cdot(V_1+V_2)$ はスカラーである。(　) をはずして展開すると

$$(V_1+V_2)\cdot(V_1+V_2) = V_1\cdot V_1 + 2V_1\cdot V_2 + V_2\cdot V_2$$

ただし

$$\boxed{V_1 \cdot V_2 \equiv -V_1^0 V_2^0 + \sum_{i=1}^{3} V_1^i V_2^i} \tag{4.13}$$

上の展開の左辺および右辺の第 1 項と第 3 項はスカラー (不変量) である。従って、右辺の第 2 項もスカラー (不変量) でなければならない。この第 2 項 (を 2 でわったもの)、すなわち、(4.13) を 2 つの **4 元ベクトルのスカラー積**と定義する。2 つのベクトルはそれらのスカラー積が 0 であるとき、**直交**しているという。

問　積 $(V_1 + V_2) \cdot (V_1 + V_2)$ は括弧をはずして展開できることを示せ。

4.3　4 元速度、4 元運動量、4 元加速度

4.3.1　4 元速度

ニュートン力学では、速度 $\mathbf{v}$ は 3 次元ベクトルで、3 次元の座標を時間で微分する (3 次元の変位ベクトル $d\mathbf{x}$ を時間 dt でわる) ことによって求められた。ニュートン力学では座標変換はガリレイ変換で、時間は座標系によらず、スカラーであった。4 次元時空では、時間はスカラーではなく座標の 1 つであり、座標変換を受ける。この時間の代わりになるスカラーとしては、静止系における時間、すなわち、固有時間を用いることが考えられる。従って、4 次元時空における 4 元ベクトルとしての速度 (**4 元速度**という) としては、

『4 次元的な変位ベクトル $d\vec{x}$ をスカラーである固有時間 $d\tau$ でわったもの』

(4 次元位置ベクトルを固有時で微分したもの) が考えられよう。そこで、4 元速度を、u(あるいは $\vec{u}$) と記して

$$\boxed{u \equiv \frac{dx}{d\tau} \quad \text{あるいは} \quad \vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau}} \tag{4.14a}$$

と定義しよう。成分は次のようになる:

$$\boxed{u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}} \tag{4.14b}$$

◇ 4 元速度の成分

(4.3) を用いると

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \underline{\underline{\gamma(c, v_x, v_y, v_z)}} \tag{4.15}$$

v_x, v_y, v_z はニュートン力学における (通常の) 速度 $\mathbf{v}$ の成分である。これから、4 元速度の成分と通常の速度の成分の関係は

$$\underline{\underline{v_x = \frac{u^1}{u^0}\,c, \quad v_y = \frac{u^2}{u^0}\,c, \quad v_z = \frac{u^3}{u^0}\,c}} \tag{4.16}$$

となる。特に、静止している場合の 4 元速度は次のようになる：

$$\underline{u^\mu = (c, 0, 0, 0)} \tag{4.17}$$

◇ 4 元速度の大きさ

4 元ベクトルの大きさはスカラーだから、その値は座標系によらない。従って、成分が (4.17) である座標系を用いれば、直ちに

$$\underline{u \cdot u = -c^2} \tag{4.18}$$

が得られる。すなわち

『どのような運動に対しても、4 元速度の大きさは常に一定値 $-c^2$ である！』

問　(4.18) を (4.14) の 4 元速度の定義から直接求めて見よ。

4.3.2　4 元運動量

ニュートン力学では、運動量=質量 × 速度 (3 次元ベクトル) であった。4 元運動量も同様に 4 元ベクトルとなるように定義しよう。すなわち、4 元運動量を p と記すと、質量 m を用いて

$$\boxed{p \equiv mu \quad \text{あるいは成分を用いて} \quad p^\mu \equiv mu^\mu} \tag{4.19}$$

と定義する。これはスカラー m とベクトル u^μ の積だから、確かにベクトルである。この 4 元運動量と通常の (ニュートン的な) 運動量の関係を調べよう。空間成分からなる 3 次元ベクトルを $\mathbf{p}$ とすると、4 元速度の成分表示 (4.14) から

$$\underline{\mathbf{p} \equiv (p^1, p^2, p^3) \equiv (p_x, p_y, p_z) = m\gamma(v_x, v_y, v_z) = m\gamma\mathbf{v}} \tag{4.20a}$$

これより、4 元運動量の空間成分 $\mathbf{p}$ はニュートン力学における運動量 $m\mathbf{v}$ の γ 倍であることになる。$v/c \ll 1$ のとき、$\gamma \approx 1 + (v/c)^2/2 \approx 1$ なので、$\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$ となり、ニュートン力学の場合になる。従って、(4.19) の定義は相対論的な場合への一般化として自然なものと考えられるであろう。

ところで、

『4 元運動量の時間成分は何を表しているであろうか。』

$v^2 \ll c^2$ の場合を調べよう。

$$p^0 = mc\gamma \approx mc\Big(1 + (v/c)^2/2\Big) = mc + \frac{1}{2}\frac{mv^2}{c}$$

これより

$$\underline{cp^0 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2} \tag{4.21}$$

となる。右辺の第 2 項はニュートン力学における運動エネルギーである。第 1 項も、もちろん、エネルギーの次元を持つ。アインシュタインはこれもエネルギーを表すと仮定した。従って、『cp^0 は全エネルギーを表す』と仮定しよう。このとき、mc^2 は**静止エネルギー**と呼ばれる。この仮定の正当性はエネルギーの保存則を考えると理解できる (後出)。結局、4 元

運動量の 4 つの成分は、ニュートン力学における運動量の 3 つの成分とエネルギーの組に対応していることになる。よって、4 元運動量の成分は、(4.20a) に時間成分を加えて

$$p^\mu = (m\gamma c,\ m\gamma v^1,\ m\gamma v^2,\ m\gamma v^3), \qquad \underline{cp^0 = E = mc^2\gamma} \tag{4.20b}$$

と表される。また、4 元運動量の大きさは次の一定値となる：

$$\underline{p \cdot p = -m^2c^2} \tag{4.22}$$

問　(4.22) を示せ。静止系における p の成分を求めよ。

問　$E^2 = m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2$ を示せ。

4.3.3　4 元加速度

ニュートン力学では、加速度は速度ベクトルを時間 (ガリレイ変換ではスカラー) で微分したものであった。相対論でも考え方は同様である。すなわち、ベクトルである 4 元速度 u をスカラーである固有時 τ で微分したものを 4 元加速度、a、とするのである：

$$\boxed{a \equiv \frac{du}{d\tau}} \tag{4.23}$$

◇　一様加速度運動

4 元加速度 a はその空間成分 $\mathbf{a} = (a^2, a^2, a^3)$ の方向が一定で、かつ、大きさが一定、$a \cdot a =$ 一定 $\equiv \alpha^2$ のとき、一様加速度の運動という。

問　4 元加速度は 4 元速度と直交すること

$$a \cdot u = 0 \tag{4.24}$$

を示せ。これは 3 次元ベクトル解析で、大きさが一定のベクトル (例えば、等速円運動の速度) の変化 (率) はベクトルに垂直であるということの 4 次元版である。

4.4　基底の変換

ベクトルをその成分と基底ベクトルを用いて、(4.10) のように展開すると便利なことが多く、よく用いられる。そうすると、基底の座標変換が問題になる。この変換について調べよう。位置ベクトルや変位ベクトルは時空の 2 つの事象によって決まるから、座標系にはよらない。(その成分である座標が座標変換を受ける。) 一般のベクトルもそうである。従って、ベクトル V を 2 つの座標系 O、O' で (4.10) のように展開すると

$$V = V^\alpha e_\alpha = V^{\alpha'} e_{\alpha'} \tag{4.25}$$

となる (e_α、$e_{\alpha'}$ はそれぞれ、O 系および O' 系の座標基底)。ベクトルの成分の変換は

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\, V^\beta \tag{4.26}$$

であったから ((4.4) 参照)、これを (4.25) の右辺に代入して、変形すると

$$V^{\alpha}\left(e_{\alpha}-\Lambda^{\lambda'}_{\ \alpha}e_{\lambda'}\right)=0 \tag{4.27}$$

がえられる。(4.27) は**任意の** V^{α} に対して成り立つから (　) 内は 0 でなければならない。従って

$$e_{\alpha}=\Lambda^{\lambda'}_{\ \alpha}e_{\lambda'}. \tag{4.28}$$

これは O' 系から O 系への変換を表している。

O 系から O' 系への変換を求めるには次のようにする。まず、係数 $\Lambda^{\lambda'}_{\ \alpha}$ を行列で表すとき、その行列を (Λ) とする：

$$\Lambda^{\lambda'}_{\ \alpha}\equiv(\Lambda)_{\lambda'\alpha} \tag{4.29}$$

(Λ) の逆行列を (Λ^{-1}) とし、

$$(\Lambda^{-1})_{\alpha\lambda'}\equiv\Lambda^{\alpha}_{\ \lambda'} \tag{4.30}$$

とする。よって、

$$\sum_{\alpha=0}^{3}(\Lambda)_{\lambda'\alpha}(\Lambda^{-1})_{\alpha\rho'}=\delta_{\lambda'\rho'}\quad \text{あるいは}\quad \Lambda^{\lambda'}_{\ \alpha}\Lambda^{\alpha}_{\ \ \rho'}=\delta^{\lambda'}_{\rho'} \tag{4.31}$$

$\Lambda^{\alpha}_{\ \rho'}$ を (4.28) にかけ (α について和をと) ると、

$$e_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\ \rho'}=\Lambda^{\lambda'}_{\ \alpha}\Lambda^{\alpha}_{\ \rho'}e_{\lambda'}=\delta^{\lambda'}_{\rho'}e_{\lambda'}=e_{\rho'}$$

書き直すと

$$\underline{\underline{e_{\alpha'}=\Lambda^{\lambda}_{\ \alpha'}e_{\lambda}}} \tag{4.32a}$$

となる [(*)]。

(*)　(Λ^{-1}) の転置行列 $(\Lambda^{-1,T})$ を用いて

$$(\Lambda^{-1,T})_{\lambda'\alpha}\equiv\Lambda_{\lambda'}^{\ \ \alpha} \tag{4.33}$$

とすることもある。このとき

$$e_{\alpha'}=\Lambda_{\alpha'}^{\ \ \lambda}\,e_{\lambda} \tag{4.32b}$$

4.5　共変ベクトル

4.5.1　共変ベクトルの定義

4 つの数の組で座標や変位と同様に座標変換されるものは (反変) ベクトルであった。上の基底の座標変換は、これらとは異なっていた。そこで、4 つの数の組で、基底と同様に座標変換されるものを考えることができるであろう。この 4 つの数の組を $\{A_{\mu}\}$ と表すと (基底の区別と同様に、下付きの添え字を用いる)、座標変換が

$$A_{\mu'}=\Lambda^{\lambda}_{\ \mu'}A_{\lambda}=A_{\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\ \mu'}\quad \text{あるいは}\quad A_{\mu'}=\Lambda_{\mu'}^{\ \ \lambda}A_{\lambda} \tag{4.34}$$

によって与えられるとする。このように座標変換される 4 つの数の組 $\{A_\mu\}$ を**共変ベクトル**という。それぞれの数を成分という。共変ベクトルを A と記し、それを成分を用いて表すときは

$$A = (A_0, A_1, A_2, A_3) \tag{4.35}$$

のように表すことが多い。

問　座標変換を行列を用いて表してみよ。

◇ 座標変換の別の表し方

(反変) ベクトル、共変ベクトル、基底、の座標変換の式、(4.4)、(4.34)、(4.32a,b) に現れる係数は添え字の位置が複雑である。変換の式を座標 (の微分係数) を用いて表すと、分かり易いかも知れない。(2.3b)、$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu} x^\nu$、の両辺を x^λ で微分すると

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda}$$

となる。ここで

$$\boxed{\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} = \delta^\nu_\lambda} \tag{$*$}$$

であることを用いると、左右の辺を入れ換えて

$$\boxed{\Lambda^{\mu'}{}_{\lambda} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda}} \tag{$**$}$$

となる。また

$$\delta^{\mu'}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} = \Lambda^{\mu'}_{\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}}$$

であるから、$\partial x^\lambda / \partial x^{\nu'}$ を要素とする行列は、$\Lambda^{\mu'}{}_{\lambda}$ を要素とする行列の逆行列 Λ^{-1} である。従って

$$\boxed{\Lambda^{\mu}{}_{\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\lambda'}}} \tag{$***$}$$

これらを用いると、(4.4)、(4.34)、(4.32a,b) はそれぞれ次のようになる：

$$\begin{cases} V^{\mu'} = \dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda & (4.4') \\[2ex] A_{\mu'} = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\mu'}} A_\lambda & (4.34') \\[2ex] e_{\alpha'} = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\alpha'}} e_\lambda & (4.23') \end{cases}$$

(4.4′) で、添え字 μ' は、左辺ではベクトルの成分を表し、右辺では座標の番号を表すので、どちらも『上付き』になる。上付きの添え字をもつ座標で微分すると (割ると) その添え字

位置は『下付き』に変わる。右辺のこのような添え字 λ はベクトルの上付きの添え字と縮約される。すなわち
(i) 両辺でベクトルの添え字は上付きである。ただし、λ は下付の λ があるので和をとる。
(ii) 和をとられない添え字は両辺で上下が同じでなければならない。
(iii) 従って、$x^{\mu'}$ は微分される座標になる。

4.5.2　不変量 (スカラー) を作る

位置ベクトルや変位ベクトルは時空における 2 つの事象で決まるので、座標系にはよらない。しかしその成分は座標系による＝座標変換される。このことは一般のベクトルでも同じである。ベクトルを (4.10)、$V = V^\alpha e_\alpha$、のように表すとき、成分と基底は座標変換されるが、ベクトルそのものは不変である。そこで、(4.10) の基底を共変ベクトルの成分で置き換えたもの

$$\underline{V^\alpha A_\alpha = A_\alpha V^\alpha}：(A \cdot V \text{ と記す}) \tag{4.36}$$

を考えると、基底と共変ベクトルの座標変換は同じであるとしたので、この量 (数) も座標系にはよらない。

問　このことを確かめよ。すなわち、$V^{\alpha'} A_{\alpha'} = V^\alpha A_\alpha$ を示せ。

3 次元空間の場合　　　　　　時空の場合

[図 4-1　ベクトルは座標変換で不変であること]

4.5.3　共変ベクトルの基底

共変ベクトルも反変ベクトルのように基底ベクトルで展開できると便利であろう。そのためには、共変ベクトルの和およびスカラー倍が定義されていなくてはならない。これらは反変ベクトルのときと同様に成分を用いて定義される：A、B を共変ベクトル、a をスカラーとすると

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{和} & ： & (A+B)_\mu \equiv A_\mu + B_\mu \\ \text{スカラー倍} & ： & (aA)_\mu \equiv a\, A_\mu \end{array}} \tag{4.37}$$

さて、共変ベクトルの基底があるとして、ω^α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ としよう。このとき、展開は

$$\underline{A = A_\alpha \omega^\alpha} \tag{4.38}$$

となるはずである。共変ベクトルは、成分で決まるから、(4.38) の成分を調べよう。左辺の β 成分は、もちろん、A_β である。右辺の β 成分は $(A_\alpha \omega^\alpha)_\beta = A_\alpha \times (\omega^\alpha)_\beta$ である。両辺が等しいためには

$$\underline{\underline{(\omega^\alpha)_\beta = \delta^\alpha_\beta}} \tag{4.39}$$

でなければならない。

問　各成分を考えることによって、このことを確かめよ。

(4.39) を満たす共変ベクトルの基底を、反変ベクトルの基底に**双対な基底** (dual basis) という。なお、反変ベクトル全体からなるベクトル空間に対して、共変ベクトル全体からなるベクトル空間を、前者に対する双対ベクトル空間ということがある。

4.6　ベクトルの積、テンソル

物理量にはベクトルで表されるものが多くある。従って、ベクトルを含む演算は避けられない。演算としては、和や積は基本的なものである。これまで、ベクトルについての演算としては、和、スカラー倍、大きさを求めることおよびスカラー積が定義された。3 次元のベクトル解析の場合の、ベクトル積に対応する演算はどうなるであろうか。

4.6.1　3 次元ベクトル解析の場合

$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ を 2 つのベクトルとするとき、これらのベクトル積は成分を用いると次のように表された：

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_y)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \tag{4.40}$$

これらの成分は、2 つのベクトルのすべての組み合わせについて積を作り、**反対称化**したものになっている。

『反対称化とは、例えば、$A_x B_y \longrightarrow A_x B_y - A_y B_x$ のようにすることをいう。』

成分の組み合わせ方は $3 \times 3 = 9$ 通りあるが、反対称化すると、$A_x B_x$ のような同じ成分の組み合わせは 0 になり、また、$A_x B_y$ と $A_y B_x$ は符号が違うだけなので、独立な組み合わせとは見なさないことにする。

一般に、次の恒等式が成り立つことがわかるであろう：

$$A_i B_j = \underbrace{\frac{1}{2}(A_i B_j + A_j B_i)}_{\uparrow\ \text{対称部分：6 成分}} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{2}(A_i B_j - A_j B_i)}_{\uparrow\ \text{反対称部分：}\underline{\text{3 成分}}} \tag{4.41}$$

対称部分は添え字 i, j を入れ換えても値が変わらないが、反対称部分は添え字を入れ換えると値は符号を変える。反対称部分の成分の数がちょうどベクトルの成分の数に等しいので、ベクトル積が作れたのである。同様のことを 4 次元で考えるとどうなるであろうか？

4.6.2　4 次元におけるベクトルの積

A、B を 2 つの共変ベクトルとする (反変ベクトルでも同様)。16 通りの成分の組み合わせの積を (4.41) と同様に、対称部分と反対称部分に分けると

$$A_\mu B_\nu = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu\right)}_{\text{対称部分：10 成分}} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{2}\left(A_\mu B_\nu - A_\mu B_\nu\right)}_{\text{反対称部分：6 成分}} \tag{4.42}$$

『どちらの部分からもベクトルを作れない。数が合わない。』

⇒ 『16 個すべての積 $A_\mu B_\nu (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ を成分とするものを **2 つのベクトルの積**と考える』

(積を同じ成分どうしにしたり、対称化や反対称化したりせず、単にすべての組み合わせについて積を作り、それらを成分とするものを考える)。このような積の性質を調べよう。

4.6.3　ベクトルの積の座標変換とテンソル

『16 個の積 $A_\mu B_\nu (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ を成分とするものを、2 つのベクトルの積から作られる (スカラーでもベクトルでもない) 新しい量』

と考えて、その成分を $N_{\mu\nu}$ と記そう：

$$\underline{N_{\mu\nu} \equiv A_\mu B_\nu}. \tag{4.43}$$

さて、この $N_{\mu\nu}$ の座標変換を調べよう。

$$N_{\mu'\nu'} \equiv A_{\mu'} B_{\nu'} = \Lambda^\lambda{}_{\mu'} A_\lambda \Lambda^\rho{}_{\nu'} B_\rho = \Lambda^\lambda{}_{\mu'} \Lambda^\rho{}_{\nu'} A_\lambda B_\rho = \Lambda^\lambda{}_{\mu'} \Lambda^\rho{}_{\nu'} N_{\lambda\rho}$$

であるから、まとめると次のようになる：

$$\underline{N_{\mu'\nu'} \equiv A_{\mu'} B_{\nu'} = \Lambda^\lambda{}_{\mu'} \Lambda^\rho{}_{\nu'} N_{\lambda\rho}} \tag{4.44}$$

スカラーやベクトルが座標変換の仕方によって定義されたことを考えると、ベクトルの積としては表せないが、その成分が 2 つの添え字を持ち、座標変換はベクトルの積と同じ (4.44) で与えられる量を考えることができる。この量の成分を $T_{\mu\nu}$ と記すと、座標変換は

$$\boxed{T_{\mu'\nu'} \equiv \Lambda^\lambda{}_{\mu'} \Lambda^\rho{}_{\nu'} T_{\lambda\rho}} \tag{4.45}$$

で与えられることになる。このように、座標変換が (4.45) で与えられる、2 つの (下付の) 添え字で表される 16 個の成分を持つ量を **2 階の共変テンソル**という。成分が (4.43) で定義される 2 つの共変ベクトルの積は、もちろん、2 階共変テンソルの例である。このことから、このベクトルの積を 2 つのベクトルの**テンソル積**という。(3 次元ベクトル解析で、ベクトルを作る積をベクトル積といったのと同様。)

『A と B のテンソル積を $A \otimes B$ と記す。成分は $(A \otimes B)_{\mu\nu}$ と記す。』

反変ベクトルのテンソル積も同様に定義することができる。すなわち、2 つの反変ベクトル U、V のテンソル積 $U \otimes V$ はその成分 $(U \otimes V)^{\mu\nu}$ が

$$\boxed{(U \otimes V)^{\mu\nu} \equiv U^\mu V^\nu} \tag{4.46}$$

であるものとして定義される。

問　$U \otimes V$ の座標変換は次のように与えられることを示せ。

$$(U \otimes V)^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\lambda \Lambda^{\nu'}{}_\rho (U \otimes V)^{\lambda\rho} \tag{4.47}$$

また、2 つの (上付き) 添え字を持つ 16 成分の量 T で、その成分 $T^{\mu\nu}$ の座標変換が

$$\boxed{T^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\lambda \Lambda^{\nu'}{}_\rho \, T^{\lambda\rho}} \tag{4.48}$$

で与えられるものを、**2 階の反変テンソル**という。

　さらに、反変ベクトルと共変ベクトルのテンソル積の定義も同様である。すなわち、反変ベクトル V と共変ベクトル A のテンソル積 $V \otimes A$ はその成分が

$$\boxed{(V \otimes A)^\mu_\nu \equiv V^\mu A_\nu} \tag{4.49}$$

であるものとして定義される。

問　上のテンソル積の座標変換は次のようになることを示せ：

$$(V \otimes A)^{\mu'}_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\lambda \Lambda^\rho{}_{\nu'} (V \otimes A)^\lambda_\rho \tag{4.50}$$

また、上付きと下付の添え字を 1 つづつもつ 16 成分の量 T で、その成分 T^μ_ν の座標変換が

$$\boxed{T^{\mu'}_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\lambda \Lambda^\rho{}_{\nu'} \, T^\lambda_\rho} \tag{4.51}$$

で与えられるものを **2 階の混合テンソル**という。

3 つ以上のベクトルのテンソル積も同様に定義できることは、ここまで来れば容易に考えられよう。成分が、このようなテンソル積の成分と同じ座標変換をするものを一般にテンソルと呼ぶことも理解できるであろう。M 個の反変ベクトルと N 個の共変ベクトルのテンソル積と成分が同じ座標変換をするテンソルは $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ 型のテンソルと呼ばれる。その成分は

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_M}_{\nu_1 \cdots \nu_N} \tag{4.52}$$

のように表せる。なお、

$$\begin{cases} \text{スカラーは} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{型のテンソル} \\ \text{反変ベクトルは} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{型のテンソル} \\ \text{共変ベクトルは} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{型のテンソル} \end{cases}$$

と考える。

(注) 同じ型のベクトルのテンソル積を作るとき、積の順序が違うと、違うテンソル積になる。

問　2階のテンソルは行列を用いて表すことができる。2つの反変 (共変) ベクトルのテンソル積は一般の2階反変 (共変) テンソルの例である。それを表す行列には特有の性質がある。この性質はどのようなものか。

問　例えば2階反変テンソルが

$$T = T^{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta}$$

のように展開されるとき、$e_{\alpha\beta}$ は2階反変テンソルの基底であると考えよう。このような基底があると思うか？　あるとすればどのようなものか？

ヒント：ベクトルの基底を e_α とするとき、$e_{\alpha\beta} = e_\alpha \otimes e_\beta$ であるか？

4.7　縮約

4.7.1　縮約の定義

テンソル演算で大変重要なものに縮約という演算がある。積を作る演算は最もよく用いられる演算の1つであるが、繰り返し積を作ると、テンソルの階数は次第に大きくなる。このような大きな階数のテンソルは、物理学ではほとんどでてこない (出てきたら困る)。従って、積だけではなく、階数を減らす演算が必要でになる。この演算が縮約である。

まず、例として、反変ベクトル V と共変ベクトル A のテンソル積の成分 $(V \otimes A)^\mu_\nu$ を考えよう。いま、**上下の添え字を同じにして、0 から 3 まで和をとる**と ($\sum$ 記号は省略して)

$$\boxed{(V \otimes A)^\mu_\mu = V^\mu A_\mu = V^\alpha A_\alpha} \tag{4.53}$$

となる。このように

『上下1対の添え字を同じにして0から3まで (添え字がとり得る範囲で) 和をとることを、それらの添え字について**縮約する**という。』

ところで、(4.53) の第2および第3辺は反変ベクトル V と共変ベクトル A から (4.36) によって作られるスカラーである。この結果を記号的にいうと

『$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 型のテンソルを縮約すると $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 型のテンソルになる。』

このことは

『**縮約すると、上付きおよび下付の添え字が1つづつ減る**。』　　(∗)

ということもできる。後者は、一般の $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ 型のテンソルに関する縮約にも一般化できる。一般のテンソルについて、縮約するとは

『テンソルの上付きと下付きの1対を同じ値にして、0から3まで和をとる。』

ことをいう。例えば、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 型のテンソル $T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ に関する縮約は、$\sum$ 記号を省くと

$$\underline{\underline{T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \longrightarrow T^{\lambda}{}_{\lambda\nu} = T^{\mu}{}_{\mu\nu}}} \tag{4.53$'$}$$

とすることである。また、$T^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = T^{\nu}{}_{\mu\nu}$ としてもよい。すなわち、縮約の仕方は 1 通りとは限らない。さて、この <u>$T^{\lambda}{}_{\lambda\nu}$ あるいは $T^{\lambda}{}_{\mu\lambda}$ は共変ベクトルである</u>。言い換えると

『$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 型のテンソルを縮約すると $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 型のテンソルになる。』

従って、上の (∗) 印のことが成り立っている。

問　このことが成り立つことを示せ。

一般に、(∗) 印のことを言い換えた

<u>『$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ 型のテンソルを縮約すると $\begin{pmatrix} M-1 \\ N-1 \end{pmatrix}$ 型のテンソルになる。』</u>　(∗∗)

ことが示せる。さらに、添え字が多いときには、2 対以上の添え字を同じ値にして各対毎に和をとることができる＝ 2 度以上縮約することができる。

例： $\underline{T^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu\lambda} \longrightarrow T^{\alpha\beta}{}_{\mu\alpha\beta} = T^{\lambda\rho}{}_{\mu\lambda\rho}}$

☆ **ダミー**と**フリー**

(4.53) の第 2、3 辺、(4.53)$'$、および、すぐ上の例の矢印の先の 2 つの辺において、0 から 3 まで和をとる上下の対になっている添え字は <u>異なるものが使われているが、結果は同じ</u> である。この場合の添え字はその値を変えて和をとるので、特定の成分を表していない。このような添え字は**ダミーな添え字**といわれる。

それに対して、すぐ上の例における μ のように和をとらない添え字は、特定の (0 から 3 までのどれかの) 成分を表している。このような上下対になっていない添え字は**フリーな添え字**といわれる。

この 2 種類の添え字の区別は重要である。例えば、

『<u>方程式の両辺でフリーな添え字は必ず同じものがなければならない。</u>』

両辺が同じ成分を表さなければならないからである。他方、ダミーな添え字は両辺で異なっていてもいっこうにかまわない。今後、添え字が現れる方程式も多数用いられるので、この区別には注意し、早くなれること。

なお、(∗) 印の『　』内は、正確に言うと、『縮約すると上付きおよび下付の <u>フリー</u> な添え字が 1 つづつ減る。』ということになる。

ここで、縮約に関して、しばしば用いられる重要な定理を述べておこう。

定理　(証明は付録で)

『(　) V^{μ} を <u>任意の</u> 反変ベクトルとし、A_{μ} を 4 つの数の集まりとする。このとき、$V^{\mu}A_{\mu}$ が

スカラーならば A_{μ} は共変ベクトルの成分である。

(　) V^{μ} を <u>任意の</u> 反変ベクトルとし、$T_{\mu\nu}$ を 16 個の数の集まりとする。このとき、$V^{\mu}T_{\mu\nu}$

が共変ベクトルならば $T_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルの成分である。

(　) V^μ を任意の反変ベクトルとし、$T_{\mu_1\cdots\mu_N}$ を 4^N 個の数の集まりとする。このとき、$V^{\mu_1}T_{\mu_1\cdots\mu_N}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ N-1 \end{pmatrix}$ 型のテンソルならば $T_{\mu_1\cdots\mu_N}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ 型のテンソルの成分である。』

4.8 計量テンソル

4.8.1 ベクトルのスカラー積、大きさ、を書き換えること

『2 階の共変テンソル T と 2 つの反変ベクトル U、V から、

$$T_{\mu\nu}U^\mu V^\nu \tag{4.54}$$

を作ると (“ 縮約 ”が 2 度されている)、スカラーが得られる。』

[　∵

$$T_{\mu'\nu'}U^{\mu'}V^{\nu'} = \underline{\Lambda^\alpha{}_{\mu'}}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\,T_{\alpha\beta}\underline{\Lambda^{\mu'}{}_\lambda}\,U^\lambda\Lambda^{\nu'}{}_\rho\,V^\rho = \underline{\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^{\mu'}{}_\lambda}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\Lambda^{\nu'}{}_\rho\,T_{\alpha\beta}U^\lambda V^\rho \tag{A}$$

ここで、$\Lambda^\alpha{}_{\mu'}$ と $\Lambda^{\mu'}{}_\lambda$ および $\Lambda^\beta{}_{\nu'}$ と $\Lambda^{\nu'}{}_\rho$ がそれぞれ逆行列であったことを用いると

$$\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^{\mu'}{}_\lambda = \delta^\alpha_\lambda \quad \text{および} \quad \Lambda^\beta{}_{\nu'}\Lambda^{\nu'}{}_\rho = \delta^\beta_\rho$$

が成り立つ。これを (A) の右辺に代入すると

$$T_{\mu'\nu'}U^{\mu'}V^{\nu'} = \delta^\alpha_\lambda\,\delta^\beta_\rho\,T_{\alpha\beta}U^\lambda V^\rho = T_{\lambda\rho}U^\lambda V^\rho$$

よって、(4.54) がスカラーであることが示された。　]

従って、2 階の共変テンソルを上手に選べば不変距離、ベクトルのスカラー積、あるいは、その大きさを一般的な演算である (4.54) の形に表せるかも知れない。そうだとすると、(4.54) があるテンソルの縮約になっていれば、不変距離、ベクトルの大きさやスカラー積を特別に定義しなくても、一般的な演算として表せることを意味していて、都合がよさそうである。以下で、計量テンソルと呼ばれるテンソルを選ぶことによって、このことを実行しよう。

4.8.2 計量テンソルの導入

一般のテンソルに対しては (4.54) は 16 個の項の和になる。他方、不変距離、(3.7)、(3.8)、ベクトルの大きさ、(4.12)、スカラー積、(4.13)、には項は 4 つだけである。従って、(4.54) の形にこれらの量を表そうとすると、用いるべきテンソルはかなり特別な形になる。4 つの項は同じ成分同士の積であり、その係数は ±1 である。よって、用いるべきテンソルは $\mu = \nu$ の成分だけを持ち、その大きさは ±1 であろう。よって、求めるテンソルを η と記すと、その成分は

$$\boxed{\eta_{00} = -1,\ \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1} \tag{4.55a}$$

とすればよさそうである。(4.55a) は

$$\underline{\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,\ 1,\ 1,\ 1) \quad \text{あるいは} \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)} \tag{4.55b}$$

と略記されることも多い。(4.55a) は、$(\eta)_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ となる行列 η を用ると

$$\boxed{(\eta)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{4.55c}$$

と表せる。実際、例えば、不変距離について

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{00}(dx^0)^2 + \eta_{11}(dx^1)^2 + \eta_{22}(dx^2)^2 + \eta_{33}(dx^3)^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$$

であるから、確かに

$$\boxed{(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{4.56}$$

となる。また、ベクトルの大きさ、$V \cdot V$、および、スカラー積、$U \cdot V$ についても

$$\boxed{V \cdot V = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \qquad \text{および} \qquad U \cdot V = \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu} \tag{4.57}$$

のようになる。

問　これを確かめよ。

成分が (4.55) で与えられるテンソルを (ミンコフスキー空間の) **計量テンソル**という。このテンソルは、時空の性質に関して基本的な、(不変) 距離の測り方を与えている重要な量である。

　計量テンソルの成分について

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$$

となっていることに注意しておこう。このことは、**計量テンソルが対称テンソル**であることを表している。

問　対称テンソル、反対称テンソルという性質は座標変換によっては変わらないことを示せ。

▽ 3 次元ユークリッド空間の場合と比較してみよう。座標が $dx^i (i = 1, 2, 3)$ だけ離れた 2 点間の距離 $d\ell$ は

$$d\ell^2 = \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$$

で与えられ、座標系の回転に対して不変である (回転を考える理由は §3.2.1 の最後参照)。クロネッカーのデルタを用いると

$$\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j \qquad \text{よって} \quad d\ell^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$$

と書くことができる。このことは、3 次元ユークリッド空間の計量テンソルの成分が δ_{ij} であることを示している。

4.8.3　計量テンソルの座標変換

η のことを計量テンソルと呼んできたが、η は 2 つの添え字を持つがテンソルであるかどうかには未だ触れていない。テンソルでなければ、これまでの式は 1 つの座標系でしか成立せず、有用ではない。そこで、η の座標変換についてみてみよう。

$(ds)^2$ が不変距離であること、すなわち $(ds)^2 = (ds')^2$、を計量テンソルを用いて表すと

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu'\nu'}dx^{\mu'}dx^{\nu'}$$

となる。この両辺は dx^μ あるいは $dx^{\mu'}$ の関数として同じ形である。このことは計量テンソルの成分に対して

$$\underline{\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}} \tag{4.58}$$

が成り立つことを示している。すなわち

『計量テンソルの成分は座標変換で不変でなければならない。』

しかし、計量テンソルも 2 階の共変テンソルとしての座標変換 (ローレンツ変換)

$$\eta_{\mu'\nu'} = \Lambda^\lambda{}_{\mu'}\Lambda^\rho{}_{\nu'}\,\eta_{\lambda\rho} \tag{4.59}$$

を受ける。このことと、上のこととをあわせて考えると、(4.58)、(4.59) より

$$\underline{\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\lambda{}_\mu\Lambda^\rho{}_\nu\,\eta_{\lambda\rho}} \tag{4.60a}$$

この関係式は、実は、**ローレンツ変換に対する条件**を表している。ローレンツ変換を表す行列 Λ をその要素が

$$\underline{(\Lambda)_{\mu'\lambda} \equiv \Lambda^{\mu'}{}_\lambda} \tag{4.61}$$

であるものと定義する (右辺のままで行列を表すこともある)。$\Lambda^\lambda{}_{\mu'}$ を表す行列は $\Lambda^{\mu'}{}_\lambda$ を表す行列の逆行列を表していたから、(4.60a) は行列を用いると次のように表せる：

$$\eta = \left(\Lambda^{-1}\right)^T\eta\,\Lambda^{-1}$$

あるいは、右から Λ 左から Λ^T をかけて

$$\boxed{\eta = (\Lambda)^T\eta\,\Lambda} \tag{4.60b}$$

問　(2.38) の行列について、この関係式を確かめよ。

(＊) 一般のローレンツ変換は、座標変換を表す行列 Λ が (4.60a、b) を満たすものと定義される。

4.8.4　一般のテンソル積

ベクトルのテンソル積を、一般化することは容易である。例えば、計量テンソル η と反変ベクトル V のテンソル積 $\eta\otimes V$ をその成分が

$$(\eta\otimes V)^{\lambda}_{\mu\nu}\equiv\eta_{\mu\nu}V^{\lambda} \tag{4.62}$$

によって与えられるものと定義することは自然な一般化であろう。これは $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ 型のテンソルと $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 型のテンソル積が $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 型のテンソルになることを示しているが、記号的に表すと、次のようになる：

$$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}0+1\\2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

よって、積を作る各テンソルの成分が持つ添え字は、すべてテンソル積の成分に現れる。さらに、計量テンソルと 2 つの反変ベクトル U、V のテンソル積は成分が

$$\underline{(\eta\otimes U\otimes V)^{\lambda\rho}_{\mu\nu}\equiv\eta_{\mu\nu}U^{\lambda}V^{\rho}} \tag{4.63}$$

で与えられる $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ 型のテンソルとすることは自然であろう。このテンソルについて 2 度縮約すると

$$\underline{\underline{(\eta\otimes U\otimes V)^{\mu\nu}_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}U^{\mu}V^{\nu}}} \tag{4.64}$$

となる。これは、まさに U と V のスカラー積である。従って、スカラー積はテンソル積と縮約という一般のテンソル演算の特別な場合として表すことができる。

(∗) $\begin{pmatrix}M\\N\end{pmatrix}$ 型のテンソルと $\begin{pmatrix}M'\\N'\end{pmatrix}$ 型のテンソルのテンソル積は記号的に

$$\begin{pmatrix}M\\N\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}M'\\N'\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}M+M'\\N+N'\end{pmatrix}$$

と表せることに注意しておく。

4.9　添え字の上げ下げ

4.9.1　添え字を下げる

計量テンソルと 4 元速度ベクトルの成分から作った

$$\eta_{\mu\nu}u^{\nu} \tag{4.65}$$

について考えよう。これは、また、計量テンソルと 4 元速度ベクトルのテンソル積 $\eta\otimes u$ において、1 度縮約したものと同じであり、**共変ベクトル**である。ところで、

　　『(4.65) はどのような物理量を表すであろうか？』

用いられているのは、物理量としては 4 元速度だけであり、計量テンソルは時空の性質を表

すものである。従って、(4.65) も 4 元速度以外の物理量を表すとは考えられない。そこで

『**(4.65) は 4 元速度を共変ベクトルを用いて表したもの。**』

と考えることができる。従って、この共変ベクトルに対しても同じ記号 u を用いて

$$\boxed{u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu} \tag{4.66}$$

のように書く。すなわち

『4 元速度という物理量は反変ベクトル u^μ、共変ベクトル u_μ のいずれを用いても表すことができる。』

と考えるのである。このように、反変ベクトルから計量テンソルを用いて共変ベクトルを作ることを**添え字を下げる**という。2 つの表し方をした場合の成分の関係は、

$$u_0 = -u^0, \quad u_i = u^i \ (i = 1, 2, 3) \tag{4.67}$$

となる。すなわち、添え字を下げると 時間成分の符号が変わり、空間成分は変わらない。

以上のことは、4 元運動量や 4 元加速度など、すべての反変ベクトルで表される物理量に対しても同様である。ベクトル V はその反変成分 V^μ によっても、共変成分 V_μ によっても表すことができる。

さらに、2 階の反変テンソルの添え字を下げることもできる。1 つの添え字だけを下げると、混合テンソルとなり、2 つとも下げると、共変テンソルになる：

$$\eta_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} = T_\mu{}^\nu, \quad \eta_{\nu\lambda} T^{\mu\lambda} = T^\mu{}_\nu; \quad \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} T^{\lambda\rho} = T_{\mu\nu} \tag{4.68}$$

問　2 つのベクトル U, V に対して、それらの反変成分が等しいとする：$U^\mu = V^\mu$。このとき、共変成分も等しいか：$U_\mu = V_\mu$ が成り立つか？成り立つとすれば、そのことを示せ。

問　(4.66) でダミーな添え字とフリーな添え字はそれぞれなにか。また、これらの添え字をそれぞれ (4.66) とは違う文字を使って表して見よ。

4.9.2　添え字を上げる

逆に、共変ベクトルから反変ベクトルを作ることもできる。それには、まず、2 階の反変テンソルを用いて計量テンソルを表す。(4.55c) の行列 η の逆行列を考える。その成分 (要素) を上付きの添え字を用いて $\eta^{\mu\nu}$ と記す：

$$\underline{(\eta^{-1})_{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu}, \quad (\eta^{-1})_{\mu\lambda}(\eta)_{\lambda\nu} = \eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu} \tag{4.69a}$$

行列として $\eta^{-1} = \eta$ であることは容易に確かめられるから

$$\boxed{\eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad \eta_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\nu} = \delta^\nu_\mu} \tag{4.69b}$$

この $\eta^{\mu\nu}$ は反変テンソルの成分であることを示すことができる。

問　δ^{ν}_{μ} は混合テンソルの成分であることを示せ。

問　$\eta^{-1} = \eta$ であること、および、$\eta^{\mu\nu}$ は反変テンソルの成分であること、を示せ。

この $\eta^{\mu\nu}$ を用いると、任意の共変ベクトル A に対して

$$\boxed{\eta^{\mu\nu} A_{\nu} \equiv A^{\mu}} \tag{4.70}$$

を作ると、反変ベクトルの成分が得られる (添字を上げた！)。

これまで見てきたような添え字の上げ下げは、一般のテンソルに対しても行うことができる。上げ下げの結果は、上付きおよび下付の添え字の数が 1 変わるだけなので、次のようにいえることは容易に分かるであろう (形式的ではあるが)：
$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ 型のテンソルの添え字を 1 つ下げると $\begin{pmatrix} M-1 \\ N+1 \end{pmatrix}$ 型のテンソルになり、1 つ上げると $\begin{pmatrix} M+1 \\ N-1 \end{pmatrix}$ 型のテンソルになる。

4.10　テンソル方程式

『2 つのベクトル U、V が等しいとき、$U^{\mu} = V^{\mu}$ であるが、この関係式は、ある座標系で成り立てば任意の座標系で成り立つ。』

このことは次のようにして示される。いま、O 系で $U^{\mu} = V^{\mu}$ であるとしよう。O' 系へのローレンツ変換は

$$U^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\lambda}\, U^{\lambda}, \quad V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\lambda}\, V^{\lambda}$$

$U^{\lambda} = V^{\lambda}$ をだから

$$U^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\lambda}\, U^{\lambda} = \Lambda^{\mu'}{}_{\lambda}\, V^{\lambda} = V^{\mu'}$$

となり示された。
ベクトルの成分は座標系によるが、ベクトルそのものは座標系によらないので、2 つのベクトルが等しいかどうかも座標系によらない。従って、『　』内のことは成立つはずであった。

この証明のキー･ポイントは方程式の両辺が共に反変ベクトルの成分であって、同じ座標変換を受けるということである。従って、上の『　』内のことは、

『方程式の両辺が反変ベクトルに限らず、一般のテンソル』

であっても示すことができる。このような、方程式の両辺が同じ型のテンソル (の成分) であるものを**テンソル方程式**という。これに対して、方程式の両辺が同じ型のテンソルでないときには、座標変換をすると方程式の形は変わってしまう。例えば、ϕ をスカラー、V^0 をベクトルの時間成分とすると、ある座標系で

$$\phi = V^0$$

であっても、座標変換すると、

$$\phi' = \phi, \quad V^{0'} = \Lambda^{0'}_{\lambda} V^{\lambda}$$

となるから、$\phi' = V^{0'}$ とは限らない。
従って、この章のはじめに記した、 相対性原理の

『物理法則を表す式はすべての慣性系で同じ形である。』

という要請は、

『物理法則をテンソル方程式の形に表せば満たされる』

ことになる。

Chapter 5

応用：例題、問題

例題 1. 地球の引力圏からの**脱出速度**はいくらか。その β および γ はいくらか。ただし、地球は半径 $6.37{\times}10^3$km の一様な球で、質量は $5.97{\times}10^{24}$kg とする。また、万有引力定数 G は $G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{N{\cdot}m^2 \cdot kg^{-2}}$ とせよ。

例題 2. 高エネルギーの素粒子実験では、荷電粒子 (陽子、電子) を加速器中で電磁的作用により加速し、高エネルギーの粒子束 (ビーム) を作り、標的に当てたり、ビーム同士を衝突させたりする。ただし、加速できる粒子の種類は限られているので、衝突により生成された 2 次的粒子もビームとして用いられる。さらに、ニュートリノのビームは 2 次的粒子の π 中間子や K 中間子の崩壊によって生成されたものを用いる (幸い、これらの粒子は 2 次粒子中では最も多い)。

さて、1000GeV(=1TeV) に加速された陽子同士を正面衝突させる実験 (**正面衝突型実験**) を考えよう。

(1) この陽子の β および γ はいくらか。ただし、陽子の静止エネルギーを 938MeV とせよ。
$\mathrm{GeV}= 10^9\mathrm{eV}$、　$\mathrm{MeV}= 10^6\mathrm{eV}$.

このような正面衝突型実験では、**実験室系**と **CM 系**は同じである。もし、標的が静止している場合の衝突実験 (**標的静止型実験**) をするとすれば

(2) 上と同じ CM 系のエネルギーにするには、実験室系におけるビームの陽子のエネルギーをどれだけにしなければならないか。

(3) この正面衝突で生成された π^+ 中間子の 1 つが、陽子のエネルギーの 1%を持っていたとする。この π 中間子の β および γ はいくらか。ただし、π 中間子の静止エネルギーを 140MeV とせよ。

(4) この π 中間子は崩壊するまでにどれだけ進むか。ただし、π^+ 中間子の**平均寿命**は $2.6{\times}10^{-8}$s である。

(＊)π 中間子は強い相互作用をする。この強い作用を医療に利用して、悪性腫瘍 (癌など) を治療することが考えられている。この際、人体にどれだけの π 中間子を照射するかが重要である。このことを考えるには、生成された π 中間子が人体に到達するまでに、どれだけ崩壊するかを知らなければならない。このとき、相対論的な効果は重要になる。このような、医療への応用を含む多目的研究のための強いビームを作る施設を π 中間子工場というが、1977

年には、アメリカ、カナダ、スイスにあった。(中村誠太郎著「中間子の話」(NHK ブックス) による。)

(5) この π^+ 中間子が崩壊すると、μ^+ 粒子 (以前は μ 中間子ともいった) とニュートリノが生成される。ニュートリノのエネルギーの最大値と最小値を求めよ。この 2 つの値の平均のエネルギーを持つニュートリノの飛行方向と π^+ 中間子の飛行方向のなす角度を求めよ。ただし、4 元運動量の保存則は成立するとする。また、ニュートリノの質量は無視できるとし、μ^+ 粒子の質量を 106MeV/c^2 とせよ。
(＊＊)μ^+ 粒子は $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ という崩壊 (平均寿命は 2.2μsec) で、ニュートリノを生成する。このニュートリノをビームとして用いようという検討がされている。このビームの強さを決めるときにも、相対論的な効果を考慮する必要がある。

解答

(2)

CM 系では全 4 元運動量の空間成分は 0 である。従って、CM 系では 2 個の粒子の全エネルギーは

$$\begin{aligned} p^0_{1CM} + p^0_{2CM} &= \sqrt{(p^0_{1CM} + p^0_{2CM})^2} = \sqrt{-(p_{1CM} + p_{2CM}) \cdot (p_{1CM} + p_{2CM})} \\ &= \underline{\sqrt{-(p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2)}} \end{aligned}$$

最後の 2 項はスカラーだから座標系によらない (**スカラーで表す**ことが重要！)。p_1、p_2 をそれぞれ、ビームおよび標的の陽子の 4 元運動量としよう。実験室系では $p_2 = (m_p c, 0, 0, 0)$ であり、$p_1 = (m_p c\gamma_p, m_p c\gamma_p\beta_p, 0, 0)$ とおける。よって、

$$p_1 + p_2 = (m_p c(1 + \gamma_p),\ m_p c\gamma_p\beta_p,\ 0,\ 0)\,.$$

よって、

$$-(p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2) = 2m_p^2 c^2 (1 + \gamma_p)$$

あるいは、スカラー積を展開して

$$-(p_1 + p_2)^2 = -{p_1}^2 - {p_2}^2 - 2p_1 \cdot p_2 = 2m_p^2 c^2 + 2m_p^2 c^2 \gamma_p^2 = 2m_p^2 c^2 (1 + \gamma_p).$$

この値が [(1000+1000)GeV]^2/c^2 になるようにする。これから γ_p が求まる。これを用いると、陽子のエネルギーは

$$m_p c^2 \gamma_p = (2000)^2/(2m_p c^2)\,\mathrm{GeV}^2 - m_p c^2 = 2 \times 10^6/0.938 - 0.938\,\mathrm{GeV}$$

(5)

実験室系を O 系とし、π^+ 中間子の飛行方向を x 方向とする。π^+ **中間子静止系**を O' 系とすると、この系では特別な方向はないから、生成されたニュートリノの飛行方向は任意の方向が可能である。π^+ 中間子の 4 元運動量を p_π、ニュートリノの 4 元運動量を p_ν、μ 粒子の 4

元運動量を p_μ とし、**4 元運動量の保存則**、$p_\pi = p_\nu + p_\mu$、が成立するとして、成分を用いて書くと

$$\begin{cases} p_\pi^{0'} = m_\pi c = p_\nu^{0'} + p_\mu^{0'} \\ \mathbf{p}'_\pi = 0 = \mathbf{p}'_\nu + \mathbf{p}'_\mu \end{cases}$$

よって、第 2 式から $|\mathbf{p}'_\nu| = |\mathbf{p}'_\mu| (\equiv |\mathbf{p}'|$ とおく)。また、$p_\nu^{0'} = |\mathbf{p}'_\nu|$、$p_\mu^{0'} = \sqrt{|\mathbf{p}'_\mu|^2 + m_\mu^2 c^2}$ を用いると、第 1 式から $|\mathbf{p}'|$ が求められて次のようになる：

$$|\mathbf{p}'| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c/2m_\pi$$

$\mathbf{p}'_\nu$ が $x'y'$ 平面内にあるように y' 軸をとる。$\mathbf{p}'_\nu$ と x' 軸 ($= x$ 軸) のなす角度を θ' とすると、

$$\mathbf{p}' = (|\mathbf{p}'|\cos\theta',\ |\mathbf{p}'|\sin\theta',\ 0)$$

である。従って、**実験室系**のニュートリノのエネルギーは

$$p_\nu^0 = \gamma_\pi(p_\nu^{0'} + \beta_\pi p_\nu^{1'}) = \gamma_\pi|\mathbf{p}'|(1 + \beta_\pi \cos\theta')$$

よって、ニュートリノのエネルギーの

$$\begin{cases} \text{最大値} = \gamma_\pi|\mathbf{p}'|(1+\beta_\pi) = |\mathbf{p}'|\sqrt{\dfrac{1+\beta_\pi}{1-\beta_\pi}} \\ \text{最小値} = \gamma_\pi|\mathbf{p}'|(1-\beta_\pi) = |\mathbf{p}'|\sqrt{\dfrac{1-\beta_\pi}{1+\beta_\pi}} \\ 2\,\text{つの平均} = \gamma_\pi|\mathbf{p}'| \end{cases}$$

平均値のときのニュートリノの 4 元運動量は、空間成分は　を用いて

$$p_\nu^{0'} = |\mathbf{p}'|, \quad \mathbf{p}' = (0,\ |\mathbf{p}'|,\ 0)$$

実験室系の空間成分は

$$p_\nu^1 = \gamma_\pi(p^{1'} + \beta_\pi p^{0'}) = \gamma_\pi\beta_\pi|\mathbf{p}'|, \quad p_\nu^2 = p_\nu^{2'} = |\mathbf{p}'|$$

従って、ニュートリノの飛行方向と π^+ 中間子の飛行方向のなす角度を θ とすると

$$\tan\theta = p^2/p^1 = 1/\gamma_\pi\beta_\pi \approx 0.14/10 = 0.014 \approx \theta$$

(＊) このように、ニュートリノと π^+ 中間子の飛行方向のなす角度は小さい。このことを利用して、筑波にある高エネルギー研究所から、神岡にあるスーパー・カミオカンデにニュートリノ・ビームを送って実験するという研究 (K2K 実験) が進行中である。それには、まず、π^+ 中間子のビームを作りその方向をカミオカンデに向けなければならない。これについては次の例を参照せよ。

例題 3. 宇宙からはいろいろな荷電粒子 (γ 線も含めて総称して**宇宙線**という) が地球にやって来ているが、陽子が最も多い。この陽子は大気に入ると間もなく空気の原子核と衝突し、多

数の粒子を作る。これらの粒子はほとんどが π 中間子である。いま、陽子の質量を m、γ 因子を 10^6 とし、これが質量 M の空気の原子核と衝突して、n 個の π 中間子を生成したとしよう。この π 中間子全体のエネルギーは、陽子と空気の原子核の CM 系において陽子のエネルギーの α%であるとし、その飛行方向は、CM 系で等方的に分布するとしよう。これらの π 中間子を実験室系、ここでは地上に固定された系、から見たときの飛行方向について考えよう。

(1)CM 系の β、γ を求めよ。

(2)CM 系における π 中間子のエネルギーはいくらか。ただし、エネルギーは n 個の π 中間子に等分されているとする。

(3)CM 系で陽子と角度 θ_{CM} の方向に生成された π 中間子は、実験室系では陽子とどれだけの角度 θ をなして見えるか。(この角度は小さいので対数 (正確には $\tan\theta$ の) を用いることが多い。)

(4)すべての π 中間子が同じ向きに進むと考えられる。このことを示せ。

(5)$\pi^{\pm}$ 中間子は空気の原子核と衝突してさらに π 中間子を生成するか、崩壊して、例題 2 のようにニュートリノと、μ 粒子を生成する。この μ 粒子の γ はどれだけか。(中性の π^0 中間子は寿命が約 10^{-18}sec と短く、崩壊して 2 つの γ 線を生成する。この γ 線も空気の原子核と衝突して、π 中間子や電子 – 陽電子対、$\mu^{\pm}$ 粒子対を生成する。)

(6) 問 (5) の μ 粒子は崩壊するまでにどれだけ進むか。

解答

(1) 陽子の質量を m、空気の原子核の質量を M とすると、実験室系におけるそれらの 4 元運動量は、陽子の進行方向を x 軸とし、陽子の速さを v とすると、それぞれ

$$p^{\mu} = (m\gamma c,\ m\gamma v,\ 0,\ 0) \quad \text{および} \quad p^{\mu}_{air} = (Mc,\ 0,\ 0,\ 0)$$

よって、全 4 元運動量 P は

$$P^{\mu} = (m\gamma c + Mc,\ m\gamma v,\ 0,\ 0)$$

となる。CM 系 (O' 系) の速さ、β_{CM} は全 4 元運動量の空間成分が 0 という条件から決められる：

$$P^{1'} = \gamma_{CM}(P^1 - \beta_{CM}P^0) = 0 \qquad \therefore\ \ \underline{\beta_{CM} = \frac{m\gamma\beta}{m\gamma + M} = \frac{\beta}{1 + M/m\gamma}}$$

これより

$$\gamma_{CM} = \left(\frac{m\gamma}{2M}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{M}{m\gamma}\right)\left[1 + \frac{M}{2m\gamma}\left(1 + (m/M)^2\right)\right]^{-1/2}$$

$M \approx 28m$ だから $(m\gamma/2M)^{1/2} = (100/56)^{1/2} \times 10^2 \approx 1.3 \times 10^2$。よって、

$$\underline{\beta_{CM} \approx 1,\ \gamma_{CM} \approx 1.3 \times 10^2}.$$

(2) まず、CM 系における陽子の 4 元運動量の時間成分 p^0_{CM} を求める。

・求め方 (　)：

、　を用いたローレンツ変換から

$$p^0_{CM} = Mc\gamma_{CM}\frac{1+m/M\gamma}{1+M/m\gamma} = c\left(\frac{mM\gamma}{2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{m}{M\gamma}\right)\left[1+\frac{1}{2mM\gamma}\left(m^2+M^2\right)\right]^{-1/2}$$

・求め方 (　)：

スカラーを作る

$$p^0_{CM} = \frac{p^0_{CM}(p^0_{CM}+p^0_{airCM})}{p^0_{CM}+p^0_{airCM}} = \frac{-p\cdot(p+p_{air})}{\sqrt{-(p+p_{air})\cdot(p+p_{air})}} = \frac{m^2c^2 - p\cdot p_{air}}{\sqrt{m^2c^2+M^2c^2-2p\cdot p_{air}}}$$

ここで、$p\cdot p = -m^2c^2$ および $p_{air}\cdot p_{air} = -M^2c^2$ を用いた。$p\cdot p_{air}$ はスカラーなので、その値は座標系によらない。ここでは、実験室系で計算する。　より、$p\cdot p_{air} = -mMc^2\gamma$ だから、これを代入して

$$p^0_{CM} = c\sqrt{\frac{mM\gamma}{2}}\left(1+\frac{m}{M\gamma}\right)\left[1+\frac{1}{2mM\gamma}\left(m^2+M^2\right)\right]^{-1/2}$$

よって、$p^0_{\pi CM} = (10^{-2}\alpha/n)p^0_{CM}$。また、$mM \approx 10^2 m_\pi^2$ だから

$$\begin{aligned} cp^0_{\pi CM} &= (\alpha/n)m_\pi c^2 \times 10^{-2}\left(\frac{mM\gamma}{2m_\pi^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{m}{M\gamma}\right)\left[1+\frac{1}{2mM\gamma}\left(m^2+M^2\right)\right]^{-1/2} \\ &\approx 2.6\times 10^2(\alpha/n)m_\pi c^2 \end{aligned}$$

(3) CM 系で x 軸と角度 θ_{CM} をなす飛行方向の π 中間子の 4 元運動量は

$$p^\mu_{\pi CM} = (p^0_{\pi CM},\ |\mathbf{p}_{\pi CM}|\cos\theta_{CM},\ |\mathbf{p}_{\pi CM}|\sin\theta_{CM},\ 0)$$

となる。ここで

$$|\mathbf{p}_{\pi CM}|^2 = \sqrt{(p^0_{\pi CM})^2 - m_\pi^2}$$

を実験室系にローレンツ変換すると

$$p^1_\pi = \gamma_{CM}(p^1_{\pi CM} + \beta_{CM}p^0_{\pi CM}),\quad p^2_\pi = p^2_{\pi CM}$$

、　を用いると

$$p^1_\pi = \gamma_{CM}\left(|\mathbf{p}_{\pi CM}|\cos\theta_{CM} + \beta_{CM}\sqrt{|\mathbf{p}_{\pi CM}|^2+m_\pi^2}\right),\quad p^2_\pi = |\mathbf{p}_{\pi CM}|\sin\theta_{CM}$$

$$\tan\theta = \frac{p^2_\pi}{p^1_\pi} = \frac{\sin\theta_{CM}}{\gamma_{CM}\left(\cos\theta_{CM}+\beta_{CM}\sqrt{1+m_\pi^2/|\mathbf{p}_{\pi CM}|^2}\right)}$$

(4) すべての π 中間子が同じ向きに進むということは、すべての θ_{CM} の値に対して、$\tan\theta > 0$ となるということである。このことを示そう。　の右辺の分子は正または 0($\theta_{CM} = 0,\ \pi$ のとき) だから、分母が正であることを示せばよい。$\theta_{CM} = 0$ のときには、分母が正、従って、$p^1_\pi > 0$ は明らか。よって、$\theta_{CM} = \pi$ のとき分母が正であることを示せばよい。それには

$$\beta_{CM}\sqrt{1+m_\pi^2/|\mathbf{p}_{\pi CM}|^2} > -1$$

を示せばよい。$|\mathbf{p}_{\pi CM}|$ をかけると

$$\beta_{CM} p_\pi^0 > |\mathbf{p}_{\pi CM}|$$

となる。2 乗して引くと

$$(\beta_{CM} p_\pi^0)^2 - |\mathbf{p}_{\pi CM}|^2 = \left[1 - \left(\frac{M}{100 m_\pi}\frac{\alpha}{n}\right)^2\right] m_\pi^2 c^2$$

ここで、$M/100m_\pi \approx 2$、また、　から 1%の陽子のエネルギーは $2.5 \times 10^2 \alpha$ 個分の π 中間子の静止エネルギーに相当するから、π 中間子が 2 個しか生成されないということは考えにくい。よって、　は正、従って、$\tan\theta > 0$ が示せた。(もちろん、何個生成されるかは相互作用による。理論的なことは難しいが、実験的には確かに $n > 2$ である。より正確には、この計算には量子論が必要であり、結果は確率的である。$n \leq 2$ である確率は非常に小さいということ。)

例題 4. 等速度運動

$$x = v_x t + a, \quad y = v_y t + b, \quad z = c$$

に対する 4 元速度および 4 元加速度を求めよ。

解答

γ 因子は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2)/c^2}} = \text{一定}$$

となる。固有時間と座標時間の関係は

$$d\tau = dt/\gamma$$

だから、4 元速度 $dx^\mu/d\tau$ は次のようになる。

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma\frac{d(ct)}{dt} = \gamma c, \quad u^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \gamma\frac{dx}{dt} = \gamma v_x, \quad u^2 = \frac{dx^2}{d\tau} = \gamma v_y, \quad u^3 = 0$$

あるいは、4 元速度の成分が

$$u^\mu = (\gamma c,\ \gamma v_x,\ \gamma v_y,\ \gamma v_z)$$

で与えられるという公式 (4.15) を用いてもよい。いずれにしても、4 元速度は一定である。従って、4 元加速度は $a^\mu = du^\mu/d\tau = 0$ となる。

例題 5. 等速円運動

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = 0$$

に対する 4 元速度および 4 元加速度を求めよ。

解答

3 次元速度の成分は

$$v_x = -a\omega\sin\omega t, \quad v_y = a\omega\cos\omega t, \quad v_z = 0$$

γ 因子は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(a\omega/c)^2}} = 一定$$

よって、4 元速度は、例題 4 の　を用いると

$$u^0 = \gamma c, \quad u^1 = -\gamma a\omega\sin\omega t, \quad u^2 = \gamma a\cos\omega t, \quad u^3 = 0$$

また、加速度は

$$a^0 = 0, \quad a^1 = -a(\gamma\omega)^2\cos\omega t, \quad a^2 = -a(\gamma\omega)^2\sin\omega t, \quad a^3 = 0$$

あるいは、まとめて

$$a^\mu = -a(\gamma\omega)^2(0,\ \cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 0)$$

問　放物運動に対する 4 元速度および 4 元加速度を求めよ。

例題 6. 一様加速度の運動

4 元加速度 a の

$$\begin{cases} (\quad) 空間成分の方向が一定 \\ (\quad) 大きさが一定、すなわち、a\cdot a = 一定 \equiv \alpha^2 \end{cases}$$

であるとき、運動は**一様加速度**であるといわれた。この運動について調べよう。一定の空間成分の方向を x 方向にとる。4 元速度を用いると、一様加速度の条件 は

$$-\left(\frac{du^0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du^1}{d\tau}\right)^2 = \alpha^2$$

となる。よって、τ の関数 $\theta(\tau)$ を用いて

$$\frac{du^0}{d\tau} = \alpha\sinh\theta(\tau), \quad \frac{du^1}{d\tau} = \alpha\cosh\theta(\tau)$$

とすることができる。この関数 θ は次のようにして決めることができる。まず、4 元加速度は 4 元速度に直交する、$a\cdot u = 0$、から

$$\frac{du^0}{d\tau}u^0 - \frac{du^1}{d\tau}u^1 = 0 \qquad よって \qquad u^1 = u^0\left(\frac{du^0}{d\tau}\right) \div \left(\frac{du^1}{d\tau}\right) = u^0\tanh\theta$$

次に、4 元速度の大きさが一定、$u\cdot u = -c^2$、であることから

$$c^2 = (u^0)^2 - (u^1)^2 = (u^0)^2(1-\tanh^2\theta) = (u^0)^2/\cosh^2\theta$$

これより

$$u^0 = c\cdot\cosh\theta, \quad u^1 = c\cdot\sinh\theta$$

の u^0 にこれを用いると

$$\alpha \sinh\theta = \frac{du^0}{d\tau} = c\cdot\sinh\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}$$

従って、

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\alpha}{c}, \qquad \therefore \underline{\theta = \frac{\alpha}{c}\tau + \theta_0}$$

を　に代入すると

$$\frac{du^0}{d\tau} = \alpha\sinh(\alpha\tau/c+\theta_0), \quad \frac{du^1}{d\tau} = \alpha\cosh(\alpha\tau/c+\theta_0)$$

積分して

$$u^0 = c\cdot\cosh(\alpha\tau/c+\theta_0)+A, \quad u^1 = c\cdot\sinh(\alpha\tau/c+\theta_0)+B$$

さらに積分して

$$\begin{cases} x^0 = ct = \dfrac{c^2}{\alpha}\sinh(\alpha\tau+\theta_0)+A\tau+ct_0 \\ x^1 = \dfrac{c^2}{\alpha}\cosh(\alpha\tau+\theta_0)+B\tau+x_0 \end{cases}$$

積分定数について：固有時の原点を選ぶことにより、$\theta_0 = 0$ とできる。運動が、$t=0$ に原点 $x=0$ から始まったとして積分定数を決めると

$$t = \frac{c}{\alpha}\sinh(\alpha\tau/c), \quad x = \frac{c^2}{\alpha}\left[\cosh(\alpha\tau/c)-1\right]$$

問　地表の重力加速度で一様に加速を続けると (α =(10m/s^2 とする))、光速の 99%の速さになるまでの時間はどれだけか。また、固有時間はどれだけか。
問　上問と同じ加速を続けると、銀河の中心まで行くのにどれだけの時間がかかるか。固有時間ではどれだけか。

例題 7. MCR 系 (瞬間静止系あるいは瞬間共動系) での加速度

アインシュタインの相対性理論においても、運動方程式はニュートンの運動方程式の一般化なので、物体の速さ v が $\beta \equiv v/c \ll 1$ となるとき後者に近づかなければならない (6 章参照)。MCR 系では、定義により、物体の速さは 0 だから、ニュートンの運動方程式が成り立つはずである。従って、4 元加速度の空間成分は MCR 系ではニュートン力学における (ガリレイ的な) ものになっているはずである。このことは重要であるので確かめてみよう。
O 系において、時刻 t における粒子の進行方向を x 方向にとる。時刻 t において、MCR 系 ($= O'$ 系) から見た粒子の加速度を求めよう。O 系ではこの時刻における粒子の 4 元速度は、粒子の速さを $v(t)$ として

$$u^\mu(t) = (c\gamma(t),\ \gamma(t)v(t),\ 0,\ 0)$$

を表せる (4.15)。固有時間と座標時間との関係は

$$d\tau(t) = dt/\gamma(t) \tag{4.3}$$

4 元加速度は

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma(t)\frac{du^\mu}{dt} = \gamma(t)\left(c\frac{d\gamma(t)}{dt},\ \frac{d}{dt}[\gamma(t)v(t)],\ 0\ 0\right)$$

ここで
$$\frac{d\gamma(t)}{dt}=\gamma^3 v\frac{dv}{dt}$$
問　　を示せ。

MCR 系では (4.24) より $a^{0'}=0$。また、MCR 系での 4 元加速度は、O 系における　から速さ $v(t)$ の系への変換により求められるから、空間成分は
$$a^{1'}=\gamma(t)(a^1(t)-\beta(t)a^0(t))=\gamma\left(\frac{d}{dt}[\gamma(t)v(t)]-\beta(t)c\frac{d\gamma}{dt}\right)=\gamma^2\frac{dv}{dt}$$
よって
$$\underline{a^{\mu'}=(0,\ \gamma^2\frac{dv}{dt},\ 0,\ 0)}$$
この 4 元加速度の**空間成分は、ニュートン力学での (ガリレイ的な) 加速度に等しい**ことを示そう。時刻 t における MCR 系から見た 4 元速度は、O 系の　を速さ $v(t)$ の系に変換して
$$\begin{cases} u^{\mu'}(t)=(1,0,0,0) \\ u^{\mu'}(t+dt)=\left(\gamma(t)[u^0(t+dt)-\beta(t)u^1(t+dt)],\ \gamma(t)[u^1(t+dt)-\beta(t)u^0(t+dt)],\ 0.\ 0\right) \end{cases}$$
第 1 式は $v'(t)=0$ を意味する (MCR 系なのでそのはず)。第 2 式の空間成分を書き直す：
$$\text{左辺}=\gamma'(t+dt)v'(t+dt)\approx[\gamma'(t)+\frac{d\gamma'(t)}{dt}dt][v'(t)+\frac{dv'}{dt}dt]\approx\frac{dv'}{dt}dt=\frac{1}{\gamma(t)}\frac{dv'}{dt'}dt$$
ここで、$v'(t)=0$、従って、$\gamma'(t)=1$、および、$d\tau=dt'$ を用い、dt の 1 次までとった。
$$\text{右辺}=\gamma(t)[\gamma(t+dt)v(t+dt)-\beta(t)c\gamma(t+dt)]$$
ここで
$$\begin{cases} \gamma(t+dt)v(t+dt)=\gamma(t)v(t)+\left(\frac{d\gamma}{dt}v(t)+\gamma(t)\frac{dv}{dt}\right)dt \\ \beta(t)c\gamma(t+dt)=v(t)\left(\gamma(t)+\frac{d\gamma}{dt}dt\right) \end{cases}$$
よって
$$\text{右辺}=\gamma\frac{dv}{dt}dt$$
従って
$$\frac{dv'}{dt'}=\gamma^2\frac{dv}{dt}\qquad\qquad \text{QED}$$

例題 8. 質量が 0 の粒子の 4 元運動量、4 元速度

質量が 0 のときには、(4.19) の 4 元運動量の定義、$p^\mu\equiv mu^\mu$、は適用できない。質量が 0 でない場合と同様にできると都合がよいが、その場合には $m\to 0$ の極限があり、それが $m=0$ の場合になっているであろう。4 元運動量に関係して、このような極限があるものはないであろうか。考えられるものとして、(4.20) から
$$\frac{p^i}{p^0}=\frac{v^i}{c}\qquad \text{あるいは}\qquad \frac{|\mathbf{p}|}{p^0}=\frac{v}{c}$$

がある。$p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ を第 2 式の分母に用いると、$m \to 0$ の極限があり

$$\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \to 1 \qquad\qquad \therefore \quad \underline{v \to c}$$

従って、

『$m \to 0$ の極限がある量については、それが $m = 0$ の場合になっているとすれば $m = 0$ の粒子に対しては $v = c$ でなければならない。』

ところで、$v = c$ とすると、この粒子の固有時間は 0、$d\tau^2 = 0$、となり、4 元速度を (4.14)、$u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$、では定義できない。(4.14)、(4.19) に代わる定義として、次のようにしよう：

(i) 4 元速度、4 元運動量の空間成分は、粒子の進行方向を向いている。
(ii) 4 元速度の空間成分の大きさは速さが c であるように決める。
(iii) 4 元運動量の時間成分は (エネルギー)$/c$ とする。
(iv) その他の成分はこれらの 4 元ベクトルがヌルであることから決める。

光子の 4 元運動量、4 元速度は、実際にこのように決められていて、正しい結果を与えている。例えば、x 方向に進む光子の 4 元速度 u とエネルギーが E のときの 4 元運動量 p は次のように表される：

$$u^\mu = (c,\ c,\ 0,\ 0) \quad \text{および} \quad p^\mu = (E/c,\ E/c,\ 0,\ 0)$$

問　　を導け。

例題 9. 光のドップラー効果

点光源が振動数 ν の単色光を等方的に放出しているとする。光子の 4 元運動量は、光源が静止している系 O では、$p^0 = E/c = h\nu/c$ だから

$$p^\mu = (p^0,\ \mathbf{p}), \qquad |\mathbf{p}| = p^0 = h\nu/c$$

と表せる。xy 平面内での $\mathbf{p}$ の分布は図 1 のように表せる。

図 1. O 系の xy 平面内での $\mathbf{p}$ 分布　　　　図 2. O' 系

この光を光源が速さ v で x 方向に遠ざかる系、O'(図 2 参照)、で観測するとしよう。O 系で

x 方向と角度 θ をなす方向に放出された光子の 4 元運動量は

$$p_\theta^\mu = (p^0,\ p^0\cos\theta,\ \mathbf{p}_\perp), \quad |\mathbf{p}_\perp| = p^0\sin\theta$$

この運動量の O' 系での成分は、振動数を ν' として

$$\begin{cases} p_\theta^{0'} = \gamma(p^0 + \beta p^1) = \gamma\dfrac{h\nu}{c}(1+\beta\cos\theta) = \dfrac{h\nu'}{c} \\ p_\theta^{1'} = \gamma(p^1 + \beta p^0) = \gamma\dfrac{h\nu}{c}(\cos\theta + \beta) \\ \mathbf{p}'_{\perp\theta} = \mathbf{p}_{\perp\theta} \end{cases}$$

O' 系の原点 (図 2 の O$'$) で観測すると、$\theta = \pi$ だから

$$p_\theta^{0'} = (1-\beta)\gamma\frac{h\nu}{c} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\frac{h\nu}{c}$$

となる。よって

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu \qquad : \quad \textbf{赤方変位}$$

x' 軸上の固定点 P で観測すると、$\theta = 0$ だから、同様にして

$$p_\theta^{0'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\frac{h\nu}{c}$$

となる。よって

$$\nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\nu \quad : \quad \textbf{青方変位}$$

また、$\theta = \pi/2$ のとき

$$p_\theta^{0'} = \gamma\frac{h\nu}{c}, \quad \therefore\ \nu' = \gamma\nu\text{:}\textbf{横方向のドップラー効果}$$

観測者が見る $\mathbf{p}'$ 分布

(∗) 宇宙が膨張していることの最初の観測的な証拠は遠方の銀河から来る光るがすべて赤方変位をしている (このことを**赤方偏移**という。) こと、さらに、赤方偏移の仕方は銀河まで

の距離 d に比例していることであった。赤方偏移 (波長の伸び) は、光源 (銀河) の静止系における波長 λ_S、(地球で) 観測される波長 λ_O を用いて

$$z \equiv \frac{\lambda_O - \lambda_S}{\lambda_S}$$

によって表される。$\lambda\nu = c$ を用いてを書き換えると

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1$$

となる。$\beta \ll 1$ のとき、$z \approx \beta$ となるので、赤方偏移 z が光源 (銀河) までの距離 d に比例しているということは $v = Hd$ とあらわされる。この関係を **Hubble の法則**という。

問　光が銀河からでて、地球 (観測者) に達するまでの時間を、銀河に静止した系で測ると Δt、地球に静止した系で測ると $\Delta t'$ とする。これらの間には次の関係がある。

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\Delta t$$

この結果は、「運動している時計は遅れる。」と言うことと矛盾しないか。
ヒント：時空図を描いて見よ。

例題 10.

棒高跳びの選手が、長さ 20m の棒を持って、速さ 0.8c で走るとする。前方には奥行きが 15m の小屋があり、入り口のドアは開いていて、ドアの所には選手の友人が立っている。友人は棒全体が小屋に入るとすぐにドアを閉める。

(1) 友人から見ると棒の長さはどれだけか。
答：ローレンツ収縮により、$20\text{m}\times\sqrt{1-0.8^2} = 12\text{m}$。よって、奥行きより短く、棒は全体が小屋に入る。

(2) 選手から見ると小屋の奥行きはどれだけか。
答：同様にして、15m×0.6=9m。

(3) 棒の尖端が小屋の奥の壁に達したとき、選手は棒の後端が小屋の中にあると思うか。
答：選手から見ると、棒の長さは 20m、小屋の奥行きは 9m なので、棒の後端は小屋の中にはない。

(4) 選手は棒全体が小屋に入ると思うか。

(5) 棒全体が小屋に入るかどうかということは、座標系によらない。従って、選手には不思議かも知れないが、棒全体は小屋に入る。このことを、時空図に、棒の尖端および後端、小屋のドアおよび壁の世界線を描くことによって説明 (納得) せよ。ある。)

単位系について

相対性理論の原理の 1 つは光速不変の原理である。この原理によれば、空間の 2 点間を光が伝わる時間が分かれば、2 点間の距離も分かる。従って、**時間を距離で表す**こともできる。

時間の単位を、1 秒間に光が進む距離にとると、すなわち、1sec$= 3\times10^8$m とすると、光の速さは $3\times10^8\mathrm{m}/1\mathrm{sec} = 3\times10^8\mathrm{m}/3\times10^8\mathrm{m} = 1$ となる。よって、$\underline{c=1}$(**無次元**である) となる。この方法は便利なことが多く、よく用いられる。以後は特に断らない限り、この単位系を用いる。

問題　O' 系は O 系の x 方向に速さ $0.9\,c$ で運動しているとする。

(1)　O' 系の x' 方向に速さ $0.9\,c$ で進む粒子を、O 系で見たときのの速さはいくらか。

(2)　O' 系の y' 方向に速さ $0.9c$ で進む粒子を、O 系で見たときのの速さはいくらか。

ヒント：4 元速度の変換を考えよ。

(3)　問 (2) を一般化し、O' 系は O 系の x 方向に速さ v で運動し、粒子は O' 系の y' 方向に速さ V で進むとしたとき、O 系での粒子の速さはいくらか。また、それが光速を超えないことを示せ。

問題　ローレンツ変換を $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu}\, x^\nu$ とするとき、係数 $\Lambda^{\mu'}_{\ \nu}$ は

$$\Lambda^{\mu'}_{\ \nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}$$

で与えられることを示せ (P.33 参照)。

問題　速さ v の代わりに、$\underline{\theta \equiv \tanh v}$ で定義される速度パラメーター θ を用いることがある。これを用いると速度の合成、(3.4)$'$、$v'' = (v+v')/(1+vv'/c^2)$ は、$\theta \equiv \tanh v$、$\theta' \equiv \tanh v'$、$\theta'' \equiv \tanh v''$ とおくと、$\theta'' = \theta + \theta'$、あるいは、$v'' = \tanh(\theta+\theta')$ と表せることを示せ。

問題　(双子のパラドックスについて) 宇宙旅行をしてきた人の固有時間は、地球にいた人の固有時間よりも短い (年をとらない) ことを示せ。ただし、地球に固定された座標系は慣性系と見なせるとする。

ヒント　一般の運動 (宇宙旅行をして帰る) に対する固有時を考える (P.27 参照)。

問題　例題 5 の円運動において

(1)　4 元速度の共変成分を求めよ。

(2)　4 元速度と 4 元加速度が直交することを確かめよ。

問題　スカラー関数 f(スカラー場ともいう) とは、ある事象 (世界点)A における値 $f(A)$ が座標系によらない関数のことをいう。座標を用いると、O 系では $f(A) = f(x^\mu)$、O' 系では $f(A) = f'(x^{\mu'})$ のように表される。ここで、x^μ および $x^{\mu'}$ は、それぞれ、事象 A の O 系および O' 系での座標である。スカラー関数の偏微分 $\partial f/\partial x^\lambda$ は (共変) ベクトル (場) となること、すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu}\, \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$$

となることを示せ。

問題　$c=1$ とする単位系において、以下の量はどのように表されるか。

(1)　プランク定数 h、　(2)　万有引力定数 G、　(3)　100 J のエネルギー、

(4)　938 MeV のエネルギー、　(5)　60 W の仕事率、　(6)　時速 60 km の速さ、

(7)　9.8 m/s^2 の加速度、(8)　60 kg 重の力、　(9)　1.0×10^7kg·m/s の運動量、

(10)　939 MeV/c の運動量

問題　O 系から見て速度 $\mathbf{v}$ で運動している系 O' への Lorentz 変換を (2.36) を基にして、以下の手順で求めよ。

(1) (2.36) において、x 方向は速度に平行な方向であり、y、z 方向は速度に垂直な方向である。(2.36) は速度に平行な方向は変換を受け、速度に垂直な方向は変換されないことを示している。位置ベクトルを速度に平行な方向と垂直な方向に分解する：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{//} + \mathbf{r}_{\perp}$$

このとき

$$\mathbf{r}_{//} = \frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}$$

であることを示せ。

(2) 時間座標の変換は

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r})$$

と表されることを示せ。

(3) また、x 方向の変換は次のように表されることを示せ。

$$\mathbf{r}'_{//} = \gamma(\mathbf{r}_{//} - \boldsymbol{\beta}x^0)$$

(4) 垂直方向は変換されず、$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$ であるが、位置ベクトルの分解を用いると、次の形に書き直せることを示せ:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}x^0$$

(5) 以上が求める Lorentz 変換であるが、この変換を行列 Λ を用いて

$$\vec{x}' = \Lambda\vec{x}$$

のように表すと、Λ は次のように表されることを示せ:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)\dfrac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\dfrac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\dfrac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\dfrac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\dfrac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\dfrac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\dfrac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} & (\gamma-1)\dfrac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\dfrac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

(6) この結果は、$\beta_x = \beta,\ \beta_y = 0,\ \beta_z = 0$ のとき、(2.36) に帰着することを確かめよ。

Chapter 6

相対論的力学

6.1 運動方程式

ニュートンの運動の法則は座標変換がガリレイ変換ならば、すべての慣性系で同じ形に表される (ガリレイの相対性)。しかし、光速不変の原理を満たす座標変換はローレンツ変換なので相対性原理

『**物理法則を表す式はすべての慣性系で同じ形である。**』

を満たさない。そこで、この場合の相対性原理を満たすように、ニュートンの法則を一般化しよう。この要請は、物理法則を表す式がテンソル方程式であれば満たされた (第 4.10 節)。実際、テンソル以外の量の座標変換は一般に複雑で規則性がなく、このような量を用いた方程式がどのような座標変換でも形を変えないということは考えにくい。そこで、ここでは物理法則 (ニュートンの運動の法則) をテンソル方程式になるように、一般化しよう。テンソル方程式は、両辺が同じ座標変換を受けるので、**共変的な形に表された**、あるいは、**共変形式の**方程式ということがある。実際には、ニュートンの運動方程式の両辺は 3 次元ベクトルなので、**両辺が 4 元ベクトルである方程式**を見つけることになる。このことを、以下のことに基づいて実行しよう：

(I) 慣性の法則が成り立つ。

(II) 物体の速さ v が小さいとき、$\beta \ll 1$ のとき、ニュートンの運動方程式が近似的に成り立つ。あるいは、$\beta \to 0$ の極限として

『**MCR 系ではニュートンの運動方程式が成り立つ。**』

(I) により慣性系があるから、慣性系で考える。特に、MCR 系ではニュートンの運動方程式が成り立つから、

$$\frac{d\mathbf{p}_N}{dt} = \mathbf{F}_N \tag{6.1}$$

である。添え字 N はニュートン力学における量であることを明示するために用いた。$\mathbf{p}_N = m\mathbf{v}$ であるが、MCR 系では $\gamma = 1$ だから、$\mathbf{p}_N$ は 4 元運動量の空間成分 $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ に等しい。また、$\gamma = 1$ は $d\tau = dt$ も意味するから、(6.1) の左辺は MCR 系では

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \tag{6.2}$$

に等しい。よって

『ニュートンの運動方程式の左辺は 4 元ベクトル

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \tag{6.3}$$

の MCR 系における空間成分である。』

従って、右辺についても

『$\mathbf{F}_N$ は MCR 系ではニュートン的な力に一致する 4 元ベクトル F^μ の空間成分』

であると考えよう：$\underline{\mathbf{F}_{MCR} = \mathbf{F}_N}$。このような力はミンコフスキーの力と呼ばれることがあり、F_M^μ(空間成分は $\mathbf{F}_M$) と記されることがある。この力を用いると、相対論的な運動方程式は

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu} \tag{6.4}$$

と表せることになる。この式の左辺は、4 元運動量の固有時間に関する変化率であるから、明確な意味を持つ。他方、右辺の力については、空間成分は MCR 系でニュートン的な力に一致するように定義された。それでは、**4 元力の時間成分**は何を表すのであろうか。左辺の時間成分は、運動量の時間成分、すなわち、エネルギーの固有時間に関する変化率であるから、右辺も力に関して同様な量のはずである。そのようなものとしては仕事率が考えられるが、このことについて調べてみよう。空間成分と同様に、まず

『MCR 系における 4 元力の時間成分を求め』

次に

『一般の座標系へ変換して、その意味を調べる』

ことにしよう。

◇ 4 元力の時間成分

4 元運動量については

$$p \cdot p = -m^2 \tag{4.22}$$

という関係がある。両辺を固有時で微分して運動方程式 (6.4) を用いると

$$0 = 2p \cdot \frac{dp}{d\tau} = 2p \cdot F, \qquad \therefore p \cdot F = 0 \tag{6.5a}$$

MCR 系では $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ だから、$p \cdot F = -mF^0_{MCR} = 0$。よって

$$\underline{F^0_{MCR} = 0} \tag{6.5b}$$

となる。これで、MCR 系における 4 元ベクトル (4 元力) の成分が確定した。次に、一般の座標系における成分を、MCR 系における成分からローレンツ変換によって求め、それにつ

いて調べよう。一般の座標系 O から見て、MCR 系が x 方向に速さ β で進んでいるとすると、ローレンツ変換は次のようになる：

$$F^0 = \gamma(F^0_{MCR} + \beta F^1_N) = \gamma\beta F^1_N,\quad F^1 = \gamma(F^1_N + \beta F^0_{MCR}) = \gamma F^1_N,\quad F^2 = F^2_N,\quad F^3 = F^3_N$$

よって、$F^0 = F^1\beta$ となり、F^0 は仕事率であることがわかる ($c = 1$ としている)。
他方、運動方程式から $F^0 = dp^0/d\tau = \gamma dE/dt$ である。従って、

$$\frac{dE}{dt} = \beta F^1_N = \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{v} = \text{ニュートン的な力による仕事率} \tag{6.6}$$

となり、**運動方程式の時間成分はエネルギー保存則**を表している。

◇ 加速度について

さて、ニュートン的な加速度 $d\mathbf{v}/dt$ について考えよう。運動方程式の空間成分は

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F}$$

ここで

$$\text{左辺} = \gamma\frac{d(m\gamma\mathbf{v})}{dt} = \gamma\left(\frac{d(m\gamma)}{dt}\mathbf{v} + m\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$$

この式の右辺第 1 項は (6.6) を用いると

$$\frac{d(m\gamma)}{dt} = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{v}$$

従って

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma^{-2}\,\mathbf{F} - \gamma^{-1}\,(\mathbf{F}_N \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = \gamma^{-2}\,\mathbf{F} - \gamma^{-1}\,(\mathbf{F}_N \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} \tag{6.7}$$

これは、ニュートン的な加速度と力の方向が必ずしも一致しないことを示している。

6.2 コンプトン散乱

一般に、荷電粒子と電磁波との相互作用 (散乱など) において、電磁波は光子のビームであるとして説明される現象を**コンプトン散乱**という。この現象は、最初、X 線の散乱において、X 線の波長が長くなることから発見され、**光 (電磁波) の粒子性**を実験的に確証したものと考えられた。光子が物質中の電子をはじき飛ばし、エネルギーを与えたために、エネルギーを失って波長が長くなると考えるのである。現在における話題としては、宇宙線の荷電粒子が、**宇宙マイクロ波背景輻射** (CMBR)(*) と衝突し、それをはじき飛ばすためにエネルギーを失う現象 (**逆コンプトン散乱**ともいう) がある。この衝突のために、宇宙線の粒子は地球に達するまでには、かなりのエネルギーを失い、詳しい計算の結果によれば、10^{20} eV 以上のものはない (**GZK 切断**) と考えられる。ところが、最近宇宙線中にこの切断以上のエネルギーをもつものが観測されたという報告があり、話題を呼んでいる。このような宇宙線粒子の有無を観測により決定することは、宇宙線の観測における重要なことの１つになっている。

(*) 宇宙に一様に存在し、地球にも等方的にやってきている約 3K の電磁波。この発見がいわゆるビッグ・バン宇宙論の正しさを決定付けた。

さて、荷電粒子は実験室系 ($= O$ 系) の原点に静止している (4 元運動量 p_2^μ) としよう。エネルギー $E = h\nu_i$ の光子 (4 元運動量 p_1^μ) のビーム (電磁波) が、x 軸の負方向から入射するとする。衝突後光子は x 軸と角度 θ をなす方向にエネルギー $h\nu_f$(4 元運動量 p_3^μ) で散乱され、荷電粒子は x 軸と角度 ϕ をなす方向に速さ v(4 元運動量 p_4^μ) ではじき飛ばされるとする (図参照)。このときのエネルギー (振動数)、あるいは、電磁波の波長の変化を求めよう。

[コンプトン散乱]

各粒子の 4 元運動量は次のように表せる：

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_1^\mu &=& (h\nu_i,\ h\nu_i,\ 0,\ 0) \\ p_2^\mu &=& (m,\ 0,\ 0,\ 0) \\ p_3^\mu &=& (h\nu_f,\ h\nu_f\cos\theta,\ h\nu_f\sin\theta,\ 0) \\ p_4^\mu &=& (m\gamma,\ mv\gamma\cos\phi,\ -mv\gamma\sin\phi,\ 0) \end{array}\right. \tag{6.8}$$

4 元運動量の保存則 $p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$ は成分を用いて書くと

$$\left\{\begin{array}{ccl} h\nu_i + m &=& h\nu_f + m\gamma \\ h\nu_i &=& h\nu_f\cos\theta + mv\gamma\cos\phi \\ 0 &=& h\nu_f\sin\theta - mv\gamma\sin\phi \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \tag{6.9}$$

となる。第 2 および第 3 式から ϕ を消去すると

$$(h\nu_i)^2 + (h\nu_f)^2 - 2h\nu_i\cdot h\nu_f\cos\theta = (mv\gamma)^2$$

この式と第 1 式から、$\gamma^2 - v^2\gamma^2 = 1$ を用いて γ を消去し、整理すると

$$\underline{\frac{1}{\nu_f} - \frac{1}{\nu_i} = \frac{h}{m}(1-\cos\theta)} \tag{6.10a}$$

が得られる。あるいは、$\lambda\nu = c = 1$ を用いて波長の変化で表すと

$$\underline{\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m}(1-\cos\theta)} \tag{6.10b}$$

なお、$h/m(=h/mc)$ は質量が m の粒子の**コンプトン波長**といわれる。

問　$\gamma^2 - v^2\gamma^2 = 1$ を確かめよ。

6.3　一様加速度運動の力

運動方程式、(6.3)、は運動量が質量 m の粒子に対しては、$p^\mu = mu^\mu$ であることを用いると

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = ma^\mu = F^\mu, \quad \text{よって} \quad a^\mu = \frac{1}{m}F^\mu \tag{6.11}$$

が成立する。MCR では、ニュートン的だから

$$a^\mu_{MCR} = (0,\ \mathbf{a}_N) = \frac{1}{m}(0,\ \mathbf{F}_N) \tag{6.12}$$

となる。一様加速度運動のとき (第 4.3.3 節参照)、加速度の空間成分の方向は一定だからその方向を x 方向にとると、$a^\mu = (a^0,\ \mathbf{a})$ において

$$\mathbf{a} = (a,\ 0,\ 0) \tag{6.13}$$

とかける。特に、MCR 系では

$$\mathbf{a}_N = (a_N,\ 0,\ 0) = (\alpha,\ 0,\ 0), \quad \mathbf{F}_N = (F_N,\ 0,\ 0)$$

ただし、α は一様加速度の大きさである。よって

$$F_N = m\alpha \tag{6.14}$$

となり、MCR 系では確かに、ニュートン的な力 = 質量 × 加速度の大きさ、になっている。一般の座標系にローレンツ変換すると

$$F^0 = \gamma_{MCR}(F^0_{MCR} + \beta_{MCR}F^1_{MCR}) = m\alpha\gamma(t)\beta(t)$$
$$F^1 = \gamma_{MCR}(F^1_{MCR} + \beta_{MCR}F^0_{MCR}) = m\alpha\gamma(t)$$

従って

$$F^\mu = m\alpha\gamma(t)(\beta,\ 1,\ 0,\ 0) \tag{6.15}$$

$m\gamma(t)$ を運動質量ということがある。(6.15) は一様加速度を与えるための力は運動質量に比例することを意味している。

6.4　磁場中の円運動 (円形加速器)

この問題は円形加速器に関して重要である。現在では、陽子を約 1TeV(10^{12}eV) まで加速することができる装置 (tevatron) もある。陽子の静止エネルギーは約 1GeV(10^9eV) だから、γ 因子は約 1000 であり、相対論が必要であることは勿論だが、運動エネルギーの方が静止エネルギーよりもはるかに大きい (超相対論的ということがある)。この加速器の円形部分の

半径は約 750m とのこと。(加速器には直線的に加速する線形加速器もある。)
さて、" ニュートン的 "ローレンツ力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{6.16}$$

は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\gamma\mathbf{v})}{dt} \tag{6.17}$$

に等しいとするとよさそうである。(*)

(*) ニュートン的な力は MCR 系において 4 元力の空間成分に等しい。しかし、MCR 系では磁場は電荷に作用しないから、一般の座標系におけるローレンツ力を得るには電場および磁場のローレンツ変換が必要になる。これらの変換は次章で考えることにして、ここでは (6.16) と (6.17) が等しいとして話を進める。

$\mathbf{E} = 0$ のとき、力は速度に垂直だから、仕事をしない。従って、速さは一定、よって、γ も一定である。従って、(6.16)、(6.17) から

$$m\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{6.18}$$

磁場は一様で z の正方向を向いているとする。

$$\mathbf{B} = (0,\ 0,\ B), \qquad B = const. > 0 \tag{6.19}$$

とし、$\mathbf{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ とおくと、(6.18) は

$$\begin{cases} m\gamma\dfrac{dv_x}{dt} = qv_yB \\ m\gamma\dfrac{dv_y}{dt} = -qv_xB \\ m\gamma\dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \tag{6.20}$$

となる。z 成分の方程式から、$v_z = const.(= 0$ とする)。よって、$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$ 一定 だから

$$v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta \tag{6.21}$$

とおける。(6.20) の x 成分の式に代入すると

$$m\gamma\frac{dv_x}{dt} = -v\dot{\theta}\sin\theta = qv_yB = qv\sin\theta B \tag{6.22}$$

これより

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{m\gamma}, \qquad \therefore \theta = -\frac{qB}{m\gamma}t + const. \tag{6.23}$$

y 成分の式からも、同じ結果がでる。まとめて

$$v_x = v\cos\left(\frac{qB}{m\gamma}t + const.\right), \quad v_y = -v\sin\left(\frac{qB}{m\gamma}t + const.\right)$$

$t=0$ のとき $v_y=0$ とすると $const.=0$ となり

$$v_x = v\cos\left(\frac{qB}{m\gamma}t\right), \quad v_y = -v\sin\left(\frac{qB}{m\gamma}t\right) \tag{6.24}$$

次に

$$v_x = cos\left(\frac{qB}{m\gamma}t\right) = \frac{dx}{dt} \tag{6.25}$$

より

$$x = \frac{m\gamma v}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m\gamma}t\right) + const.(\equiv x_c) \tag{6.26a}$$

同様にして

$$y = \frac{m\gamma v}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m\gamma}t\right) + const.(\equiv y_c) \tag{6.26b}$$

これより

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = \left(\frac{mv\gamma}{qB}\right)^2 \tag{6.27}$$

これは半径が

$$r = \frac{mv\gamma}{qB} = \frac{|\mathbf{p}|}{qB} \tag{6.29}$$

の円運動である。非相対論の場合と似ているが、半径が γ 因子に比例する(質量が運動質量になる)。

6.5 ラグランジュ形式

6.5.1 1 個の自由粒子の場合

1 個の自由粒子の場合に限らないが、ニュートンの運動方程式 (6.1) は**変分原理** (Hamilton の原理) から導くことができた。この原理は、

> 『時刻 t_1 に位置 $\mathbf{r}_1$ にあった粒子が、時刻 t_2 に位置 $\mathbf{r}_2$ に達したとすると、
> その間にどのような経路をとるか』

という問題に対する回答を与える。すなわち

『位置 $\mathbf{r}$ および速度 $\dot{\mathbf{r}}$ の関数であるラグランジアン $L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ の時間についての積分 (作用積分)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})dt \tag{6.30}$$

が極値になるような経路をとる』

というのであった。ラグランジアン $L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ は運動エネルギーを T、位置エネルギーを U とすると、$L=T-U$ で与えられた。
変分原理による定式化の利点は、ラグランジアンの変数は、デカルト座標 (x,y,z) に限らず、任意の一般化座標を用いても、変分原理から導かれる (オイラー・) ラグランジュ方程式が全く同じ形に表せるということである。運動方程式の共変性、作用積分は 1“ 成分 ”であることを考慮すると、相対論では、まず、

『( ) **作用積分をスカラーにとる**』

ことを意味していると考えられよう。時間はガリレイ変換ではスカラーであるが、相対論ではもちろんスカラーではない。従って、積分変数を

『( ) **時間に代わるスカラーの変数**』

にする必要があろう。そうすると、

『( ) **ラグランジアンもスカラー**』

でなければならない。ただし、相対論ではエネルギーは4元運動量の時間成分であり、その、運動エネルギーと位置エネルギーへの分割は一般には意味がない。一般には、スカラーのラグランジアンを $\hat{L}$、時間に代わるスカラー変数を、世界線のあるパラメーター λ にとれば、作用積分は次の形にすればよいであろう：

$$\underline{I = \int \hat{L} d\lambda} \tag{6.31}$$

問題は、それではラグランジアン $\hat{L}$ をどのようにとればよいかということになる。

自由粒子は直線運動をする。直線は2点間の最短曲線である。2点間の最短曲線を求める問題は、変分法の基本である。このようなことを考慮すると、作用としては2点(2つの事象)の間の不変距離をとることが考えられる。ただし、作用は次元 [M^{1}L^{2}T^{-1}] をもつ。距離の次元はもちろん [L] だから、次元 [M^1 LT^{-1}] を持つ定数を用いて次元を調整する。このような定数としては、粒子の質量 m と光速 c の積がある。従って、自由粒子の作用積分を

$$\underline{\underline{I = mc \int_{P_1}^{P_2} ds}} \tag{6.32}$$

とすることが考えられる。この作用が正しいかどうかは、これから導かれるラグランジュ方程式が自由粒子の運動方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 \tag{6.33}$$

と一致するかどうかである。さて、(6.32) を一般座標 x^μ と一般速度 $dx^\mu/d\tau$ を用いて具体的に書いてみよう。

$$ds = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}\ d\tau$$

だから、作用積分は

$$I = mc \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}\ d\tau \tag{6.34}$$

となる。これを座標 x^μ で変分すると、

$$\frac{d}{d\tau} \left(mc \frac{dx_\mu}{d\tau} \div \sqrt{-\eta_{\lambda\rho} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}} \right) = 0 \tag{6.35}$$

平方根内は固有時間の定義を用いると(4元速度の大きさなので)c^2 だから、確かに自由粒子の運動方程式(6.4)が得られる。[†]

[†] この固有時間をパラメーターとする方法は一見よさそうに見えるが、正確ではない。実際、$ds = cd\tau$ だから、作用積分は

$$I = mc^2 \int_{P_1}^{P_2} d\tau$$

となる。これは“ 定数 ”だから変分は常に 0 である。理由は、固有時間は MCR 系での時間なので、座標や速度と独立な変数ではないからである。上では、(6.34) においては固有時間の定義を用いずに、単なるパラメーターとして扱い、平方根内を c^2 としなかったが、固有時間の定義を用いれば、作用積分はもちろん“ 定数 ”になる。問題は 2 つの事象 P_1、P_2 を通る粒子の世界線を求めることだから、この世界線のパラメーターを (6.30) における時間に代わるスカラー変数にとればよさそうである。このパラメーターを λ とすると、$dx^\mu = (dx^\mu/d\lambda)d\lambda$ だから作用積分は

$$I = mc \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda \tag{6.36}$$

この作用積分を座標 x^μ で変分して得られるラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{d\lambda}\left(mc\frac{dx_\mu}{d\lambda} \div \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\right) = 0 \tag{6.37}$$

となる。固有時間もパラメーター λ の関数である。このとき

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{d\tau}{d\lambda}\frac{d}{d\tau}, \qquad \frac{d\tau}{d\lambda} \neq 0 \tag{6.38}$$

となることを用いると、(6.37) から自由粒子の運動方程式 (6.32) が得られる。

問　(6.37) から (6.32) を導け。

多粒子系については、粒子間の相互作用を衝突時以外に取り入れることは、作用が光速より速くは伝わらないということのために難しく、成功していない。相互作用がない場合には、系の作用積分は、単に各粒子に対する (6.31) の形の作用積分の和をとるだけでよい。

6.5.2　外場がある場合

場の粒子に対する作用は、粒子のある点でなされるから、離れた点での 2 粒子間の作用におけるような、作用の伝わる速さについての問題はない。

外場とは外部から作用する力のことであるが、この力 (場) の源となる物体があるはずであり、この物体には粒子からの反作用が作用する。よって、この源となる物体はこの反作用によりその運動、従って、それが作る場が影響を受けるはずであるが、この影響が無視できるとき、物体が作る場を外場という。よく知られた例としては、地表付近に地球が作る重力場中を粒子が運動する場合や §6.4 のような与えられた電磁場中での荷電粒子の運動がある。

　さて、位置エネルギーは相対論では座標系によらない意味を持たないが、それに対応するスカラー関数 (ポテンシャルということにしよう) を考えられないであろうか。そのようなスカラー関数、U、がある場合には、作用関数に

$$-\int U(x^\mu) d\lambda \tag{6.39}$$

を付け加えればよさそうである。これは、スカラーのラグランジアンを次のようにとることと等価である：

$$\hat{L} = mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} - U \tag{6.40}$$

具体的な例としては、電磁場中の荷電粒子の場合以外は、ほとんどないといってよさそうである。この扱いに対しては、電磁場の明白に共変的な扱いが必要になるので、それを準備した後で考えることにしよう (§7.8 参照)。

Chapter 7

電磁気学：4元テンソルを用いた形

7.1 マックスウェル方程式の不変性

電磁気学の法則は次のマックスウェルの方程式系で表される:

$$\begin{cases} \text{(I)} & \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \text{(II)} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \text{(III)} & \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{(IV)} & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{7.1}$$

真空、$\rho = 0$、$\mathbf{j} = 0$、の場合には、これらの方程式から電磁波に対する波動方程式が導かれる (光速が重要なので、$c = 1$ とせずに明示した)：
(III) の rotation をとり、右辺には (IV) を用いると

$$\text{左辺} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$$

$$\text{右辺} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

従って

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0 \tag{7.2a}$$

が得られる。同様にして、(IV) の rotation をとり、右辺には (III) を用いると

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = 0. \tag{7.2b}$$

(7.2) は電場および磁場が位相速度 c で伝播する波動であることを表している。この速さが、どの座標系に対するものであるかが、問題であったが、(7.2) が成立する系に対する地球の運動による、地球から見た電磁波の速さへの影響が観測されなかったため (マイケルソン – モーレイの実験)、アインシュタインは光速不変の原理を要請したのであった。従って、

『**(7.2) はすべての慣性系で成立する。**』

と考えるのは自然である。さらに、マックスウェル方程式から導かれたのであるから『マックスウェル方程式はすべての慣性系で成立する。』と考えるのも自然である。座標は確かにローレンツ変換されるから、電場 $\mathbf{E}$、磁場 $\mathbf{B}$ もローレンツ変換を受けなければならない。そこで、

『マックスウェル方程式がすべての慣性系で成り立つ。』

ことを仮定して、

『電場および磁場のローレンツ変換』

を求めよう。

7.2 電場および磁場のローレンツ変換

マックスウェル方程式系 (7.1) が成り立つ系を O 系とし、O' 系でも同じ形の方程式系が成り立つとする。

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad \nabla' \cdot \mathbf{E}' = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho' \\ \text{(II)} \quad \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ \text{(III)} \quad \nabla' \times \mathbf{E}' = -\dfrac{\partial' \mathbf{B}'}{\partial t'} \\ \text{(IV)} \quad \nabla' \times \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j}' + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial' \mathbf{E}'}{\partial t'} \end{cases} \tag{7.3}$$

ローレンツ変換は次のように表された：

$$t' = \gamma\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{2.36}$$

この逆変換は次のように表された：

$$ct = \gamma\Big(ct' + \frac{v}{c}x'\Big), \quad x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z'. \tag{2.37}$$

これより、微分について次の関係がある：

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right). \tag{7.4a}$$

同様にして

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}. \tag{7.4b}$$

逆の関係は

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{7.5}$$

これらを用いて、(7.1) を微分方程式と見たとき、変数を O 系の座標から、O' 系の座標に変換したものが (7.3) になっていることになる。まず、電磁場の源がない (III) についてみる。

◇ x **成分**

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y = -\frac{\partial}{\partial t}B_x$$

(7.4) より

$$\frac{\partial}{\partial y'}E_z - \frac{\partial}{\partial z'}E_y = -\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)B_x = -\gamma\frac{\partial}{\partial t'}B_x + \gamma v\frac{\partial}{\partial x'}B_x \tag{7.6}$$

この式は (7.3) の (III) に一致すべき式であるが、x' についての微分が“ 余分 ”である。これを (II) を用いて消去する:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial y}B_y + \frac{\partial}{\partial z}B_z = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)B_x + \frac{\partial}{\partial y'}B_y + \frac{\partial}{\partial z'}B_z.$$

よって

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}B_x = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}B_x - \frac{\partial}{\partial y'}B_y - \frac{\partial}{\partial z'}B_z. \tag{7.7}$$

(7.7) を (7.6) に代入し (γ をかけて)、同じ微分の項をまとめると

$$\frac{\partial}{\partial y'}[\gamma(E_z + vB_y)] - \frac{\partial}{\partial z'}[\gamma(E_y - vB_z)] = -\frac{\partial}{\partial t'}B_x$$

となる。これが (7.3) の (III) と同じ方程式であるのは、対応する各項が比例することである：

$$E_{z'} = a(v)\gamma(E_z + vB_y), \quad E_{y'} = a(v)\gamma(E_y - vB_z), \quad B_{x'} = a(v)B_x. \tag{7.8a}$$

★ y、z 成分についても同様にして、次の関係が導かれる：

$$E_{x'} = a(v)E_x, \quad E_{z'} = a(v)\gamma(E_z + vB_y), \quad B_{y'} = a(v)\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \tag{7.8b}$$

および

$$E_{y'} = a(v)\gamma(E_y - vB_z), \quad E_{z'} = a(v)E_x, \quad B_{z'} = a(v)\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \tag{7.8c}$$

E_x、B_x の変換、および、2 つの座標系の同等性から、$a(0) = 1$ とすると、$a(v) = 1$ でなければならない。

問　(7.8b、c) を示せ。

以上をまとめると、次のようになる

$$\boxed{\begin{aligned} &E_{x'} = E_x, \quad E_{y'} = \gamma(E_y - vB_z), \quad E_{z'} = \gamma(E_z + vB_y) \\ &B_{x'} = B_x, \quad B_{y'} = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \quad B_{z'} = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}} \tag{7.9}$$

このように、電場や磁場は 3 次元的にはそれぞれがベクトル場であるが、ローレンツ変換ではそれらだけでは単独では変換されず互いに混ざり合う。従って、**4 次元的にはそれらは 4 元ベクトルの空間成分ではない**。すなわち、**電場および磁場の 6 個の成分を成分として含むテンソルで表される物理量がなければならない**。この物理量を見出すために、電磁場のスカラーおよびベクトル・ポテンシャルを考えよう。

7.3　4 元ベクトルポテンシャル

電磁場のスカラー・ポテンシャルを ϕ、ベクトル・ポテンシャルを $\mathbf{A}$ とすると、電場および磁場は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{7.10a}$$

と表される。座標変換しても (O' 系でも) 同様である。

$$\mathbf{E}' = -\nabla'\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{A}', \qquad \mathbf{B}' = \nabla'\times\mathbf{A}' \tag{7.10b}$$

まず、x 成分について考えよう。(7.9) から、$E_x = E_{x'}$ であったから、(7.4) を用いて

$$-\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_x = -\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta\frac{\partial}{\partial x^{0'}}\right)\phi - \gamma c\left(\frac{\partial}{\partial x^{0'}} - \beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)A_x = -\frac{\partial}{\partial x'}\phi' - c\frac{\partial}{\partial x^{0'}}A_{x'}$$

となる。これより

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\phi' - \gamma(\phi - vA_x)\right] + c\,\frac{\partial}{\partial x^{0'}}\left[A_{x'} - \gamma\left(A_x - \beta\frac{\phi}{c}\right)\right] = 0$$

従って

$$\frac{\phi'}{c} = \gamma\left(\frac{\phi}{c} - \beta A_x\right), \qquad A_{x'} = \gamma\left(A_x - \beta\frac{\phi}{c}\right) \tag{7.11a}$$

次に、y 成分については、(7.9) から $E_{y'} = \gamma(E_y - vB_z)$ であったから

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - c\frac{\partial}{\partial x^{0'}}A_{y'} &= \gamma\left[-\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t} - v\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\right] \\
&= \gamma\left[-\frac{\partial}{\partial y'}\phi - c\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^{0'}} - \beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)A_y + v\frac{\partial}{\partial y'}A_x - v\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta\frac{\partial}{\partial x^{0'}}\right)A_y\right]
\end{aligned}$$

これを整理すると

$$\frac{\partial}{\partial y'}[\phi' - \gamma(\phi - vA_x)] + c\frac{\partial}{\partial x^{0'}}[A_{y'} - A_y] = 0$$

が得られる。従って

$$\frac{\phi'}{c} = \gamma\left(\frac{\phi}{c} - \beta A_x\right), \qquad A_{y'} = A_y \tag{7.11b}$$

となる。z 成分についても同様である。

問　実際にやってみよ。

(7.11a)、(7.11b) から

$$\boxed{A^\mu = \left(\frac{\phi}{c},\ \mathbf{A}\right) = (A^0,\ A^1,\ A^2,\ A^3)} \tag{7.12}$$

は 4 元ベクトルであることがわかる。A^μ は**電磁場の 4 元ベクトル・ポテンシャル**と言われる。

記法

次のような微分記号を用いる

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\nu \qquad \text{例えば} \qquad \partial^\mu A^\nu = \eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda A^\nu \tag{7.13}$$

このとき、A^μ を用いると電場および磁場は次のように表せる：

$$\begin{cases} E_x \equiv E^1 = -c\,\partial_1 A^0 - c\,\partial_0 A^1 = c\,(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \\ B_x \equiv B^1 = \partial_y A^z - \partial_z A^y = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \end{cases} \tag{7.14}$$

他の成分についても同様である。これらは、次のように定義される 2 階の反対称テンソル

$$\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \tag{7.15}$$

を用いると

$$\boxed{\begin{aligned} &E^i = c\,F^{0i},\ (i = 1,\ 2,\ 3) \\ &B^1 = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2, \quad B^2 = \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3, \quad B^3 = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \end{aligned}} \tag{7.16}$$

と表すことができる。$F^{\mu\nu}$ は行列 $[F^{\mu\nu}]$ を用いて

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

と表すこともできる。$F^{\mu\nu}$ は**電磁場テンソル**とよばれる (**ファラデー・テンソル**と呼ばれることもある)。

(＊) <u>レビ – チビタ (Levi-Civita) の記号</u>

3 つの添え字について完全反対称なレビ – チビタの記号を用いると便利なことが多い。この記号は

$$\epsilon^{ijk} = \epsilon^i{}_{jk}, \quad \epsilon^{123} = 1 \tag{7.18a}$$

あるいは、少し詳しく書くと

$$\epsilon^{ijk} = \epsilon^i{}_{jk} = \begin{cases} 1 & : \ \{ijk\} \text{ が } \{123\} \text{ の偶置換のとき} \\ -1 & : \ \{ijk\} \text{ が } \{123\} \text{ の奇置換のとき} \\ 0 & : \ \text{その他のとき} \end{cases} \tag{7.18a}$$

のように定義される。この記号を用いると、磁場は

$$B^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}F^{jk} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon^{ijk}F^{jk} \tag{7.19}$$

問　これを確かめて見よ。

7.4　4元電流密度

次に、電荷密度 ρ および電流密度 $\mathbf{j}$ の座標変換を求めよう。

7.4.1　電荷密度の変換

電荷密度 ρ の変換は、マックスウェル方程式 (7.1) の (I) から、$\nabla\cdot\mathbf{E}$ の変換と同じである。後者の変換は (7.5)、(7.9) を用いて

$$\begin{aligned}\nabla'\cdot\mathbf{E}' &= \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x+\frac{\partial}{\partial y}[\gamma(E_y-vB_z)]+\frac{\partial}{\partial z}\gamma(E_z+vB_y)\\ &= \gamma\nabla\cdot\mathbf{E}+\frac{\gamma v}{c^2}\partial_t E_x-\gamma v(\nabla\times\mathbf{B})_x\\ &= \mu_0 c[\,\underline{\gamma(c\rho-\beta j_x)}\,]\end{aligned}\tag{7.20}$$

よって、電荷密度はローレンツ変換すると、電流密度と混ざり合う。次に電流密度の変換を見てみる。

7.4.2　電流密度の変換

マックスウェル方程式 (7.1) の (IV) の変換を調べる。左辺の変換は

$$\begin{aligned}(\nabla'\times\mathbf{B}')_{x'} &= \partial_{y'}B_{z'}-\partial_{z'}B_{y'}=\partial_y[\gamma(B_z-\frac{\beta}{c}E_y)]-\partial_z[\gamma(B_y-\frac{\beta}{c}E_z)]\\ &= \gamma\left[(\nabla\times\mathbf{B})_x-\frac{\beta}{c}(\partial_y E_y+\partial_z E_z)\right]\end{aligned}$$

また、右辺第 2 項の変換は

$$\partial_{t'}E_{x'}=\gamma(\partial_t+v\partial_x)E_x=\gamma c(\partial_0 E_x+\beta\partial_x E_x)$$

よって

$$\mu_0 j_{x'}=(\nabla'\times\mathbf{B}')_{x'}-\frac{1}{c^2}\partial_{t'}E_{x'}=\gamma\left[(\nabla\times\mathbf{B}_x-\frac{1}{c^2}\partial_t E_x-\frac{\beta}{c}\nabla\cdot\mathbf{E}\right]=\mu_0\underline{\gamma(j_x-\beta c\rho)}\tag{7.21}$$

(7.20)、(7.21) から

$$\boxed{(c\rho,\ \mathbf{j})\ \equiv\ j^\mu}\tag{7.22}$$

が 4 元ベクトルであることが分かる。これを **4 元電流密度**という。

問　y,z 成分についても調べよ。

7.5 マックスウェル方程式のテンソル表示

マックスウェル方程式 (7.1) の各項の座標変換は項毎に異なり、複雑である。これらを、座標変換が分かり易いテンソルを用いた形、すなわち、**明白に共変的な形**に表そう。
まず、(I) について

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_i E^i = c\partial_i F^{0i} = c\partial_\lambda F^{0\lambda} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \mu_0 c j^0 \qquad \text{よって} \qquad \underline{\partial_\lambda F^{0\lambda} = \mu_0 j^0}$$

(IV) については、x 成分に対して

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{B})^x &= (\nabla \times \mathbf{B})^1 = \partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 = \partial_2 F^{12} - \partial_3 F^{31} = \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} \\ &= \frac{1}{c^2}\partial_t E^1 + \mu_0 j^1 = \partial_0 F^{01} + \mu_0 j^1\end{aligned}$$

よって、$\underline{\partial_\lambda F^{1\lambda} = \mu_0 j^1}$ となる。y, z 成分に対しても同様。従って、(I)、(IV) をまとめると

$$\boxed{\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = \mu_0 j^\mu} \tag{7.23}$$

問　(IV) についての書き換えを、レビ – チビタの記号を用いて行って見よ。
　ヒント：$\epsilon^i{}_{jk}\epsilon^k{}_{lm} = \delta^i_l \delta_{jm} - \delta^i_m \delta_{jl}$ が成り立つ。

次に、(II) については

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = \underline{\partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12} = 0}$$

(III) については、x 成分に対して

$$(\nabla \times \mathbf{E})^1 + \partial_t B^1 = \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + c\partial_0 B^1 = c(\partial_2 F^{03} - \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{23}) = 0$$

c で割り、添え字の位置を上げ、順序を変えると

$$\underline{\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = 0}$$

添え字に x、すなわち、1 が含まれない。y、z 成分に対しても同様にすると、結局、(II)、(III) をまとめて次式が得られる：

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0} \tag{7.24}$$

従って

『**マックスウェル方程式系は (7.23)、(7.24) の 2 つのテンソル方程式の組で表される**。』

このことは、3 次元空間で定義された $\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$ を用いた (7．1) は相対論的であることは明らかではないが、4 次元時空で定義された良を用いると、明白に共変的な形にマックスウェル方程式を表せると言うことを示したいる (次元を上げてみると見通しがよくなる)。

問　(7.24) は $F^{\mu\nu}$ の定義を用いると、恒等的に成り立つことを示せ。

7.6 電荷の保存則

自然界ではどのような相互作用によっても、系の全電荷は不変である。このことを**電荷の保存則**という。この保存則は、明白に共変的な形ではどのように表されるであろうか。電荷の保存則とは、ある領域 (V とする) 内の全電荷 (Q と記す) の減少 (率) は、その領域から (単位時間に) 流れ出る電荷に等しいということである。
領域 V 内の全電荷 Q は

$$Q = \int_V \rho(x^\lambda) d^3x = \frac{1}{c}\int_V j^0(x^\lambda) d^3x \tag{7.25}$$

で与えられる。この電荷の変化率 (増加率) は (減少率は $-$ をつける) 次のようになる：

$$\frac{dQ}{dt} \equiv \dot{Q} = \frac{d}{dt}\int_V \rho(x^\lambda)d^3x = \int_V \partial_t \rho(x^\lambda)d^3x = \frac{1}{c}\int_V \partial_0 j^0(x^\lambda)d^3x \tag{7.26}$$

また、領域 V から単位時間当たりに流れ出る電荷は領域 V を囲む境界面を S とすると

$$\oint_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{7.27}$$

で与えられる。ここで、dS は S 上の面積要素、$\mathbf{n}$ は dS のところで面 S に立てた外向きの単位法線ベクトルである。ガウスの定理により

$$\oint_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{j}\,d^3x = \int_V \partial_i j^i\,d^3x \tag{7.28}$$

電荷の保存則は、(7.26) にマイナスをつけたものが (7.28) に等しいということだから

$$-\int_V \partial_0 j^0(x^\lambda)d^3x = \int_V \partial_i j^i\,d^3x \quad\Rightarrow\quad \int_V (\partial_0 j^0 + \partial_i j^i)d^3x = \int_V \partial_\mu j^\mu d^3x = 0$$

領域 V の取り方は任意でよいから、この式が成り立つには

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \tag{7.29}$$

でなければならない。(7.29) が電荷の保存則を明白に共変的な形で表す式である。

7.7 ローレンツ力について

4 元力はその空間成分が MCR 系でニュートン的な力に等いように、$\mathbf{F}_{MCR} = \mathbf{F}_N$、定義され、時間成分は運動方程式を満たすように定められた。従って、荷電粒子が磁場から受けるローレンツ力は、粒子が運動している系において直接結びつけることはできない。粒子が MCR 系で受ける電磁気的な力をもとに、一般の座標系におけるローレンツ力を求めてみよう。MCR 系では磁場は力を作用せず、電場だけが作用する。この力は

$$\mathbf{F}_{MCR} = f(\gamma)\mathbf{F}_N = qf(\gamma)\mathbf{E}_{MCR} \tag{7.30}$$

と表される。ただし、ここでは $f(\gamma)=1$ とせず、そのまま残した。この (7.30) を、例によって、4 元テンソルの空間成分の形に書き直そう。まず、(7.16) から $E^i_{MCR}=cF^{0i}_{MCR}$ である。また、荷電粒子の 4 元速度について MCR 系では、$u^0=c$。従って、

$$F^i_{MCR}=qf(\gamma)u^0F^{0i}_{MCR}=-qf(\gamma)u_0F^{0i}_{MCR}=-qf(\gamma)u_{\lambda,MCR}F^{\lambda i}_{MCR}$$

さらに、$F^0_{MCR}=0$ であり、$F^{00}=0$ も成り立つので、上の式は 0-成分についても成り立つ。従って

$$F^\mu_{MCR}=-qf(\gamma)u_{\lambda,MCR}F^{\lambda\mu}_{MCR}$$

これはがテンソル方程式になるのは、$\underline{f(\gamma)=1}$ の場合である。このときには、上の式は任意の座標系で成り立つ、すなわち、ローレンツ力を表す 4 元ベクトルは次のようになる：

$$\boxed{F^\mu=-qu_\lambda F^{\lambda\mu}=qu_\lambda F^{\mu\lambda}} \tag{7.31}$$

従って、荷電粒子に対する運動方程式は次のように表せる：

$$\underline{\frac{dp^\mu}{d\tau}=F^\mu=qu_\lambda F^{\mu\lambda}} \tag{7.32}$$

この運動方程式の空間成分を調べよう。

$$\text{左辺}=\frac{dp^i}{d\tau}=\gamma\frac{dp^i}{dt}$$

右辺は

$$F^i=qu_\lambda F^{i\lambda}=q[u_0F^{i0}+u_jF^{ij}]$$

右辺の [ ] 内第 1 項は、(7.16) を用いて

$$u_0F^{i0}=(\gamma c)\frac{E^i}{c}=\gamma E^i$$

となり、第 2 項は、同様に

$$F^{ij}=\epsilon_k{}^{ij}B^k,\qquad \therefore u_jF^{ij}=\gamma\epsilon_k{}^{ij}v_jB^k=\gamma\epsilon^i_{jk}v^jB^k=\gamma(\mathbf{v}\times\mathbf{B})^i$$

となるから

$$F^i=q\gamma\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)^i$$

これらより運動方程式の空間成分は

$$\gamma\frac{dp^i}{dt}=q\gamma\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)^i \quad\Rightarrow\quad \underline{\frac{d\mathbf{p}}{dt}=q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)}$$

となり、(6.16)、(6.17) と一致する。

7.8 荷電粒子のラグランジアン

荷電粒子の運動方程式、(7.32)、を変分原理から導くことを考えよう。問題は、(6.40) におけるポテンシャル U を見出すことである。ローレンツ力は速度によるから、ポテンシャルも速度に依存するはずである。このような場合には、非相対論的な力学では、速度に依存するポテンシャル $U(q_i, \dot{q}_i)$ と一般化力の成分 $Q_i^{(*)}$ の関係は

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{7.33}$$

$^{(*)}$ 力学的な運動量の成分を p_i とすると、運動方程式は $dp_i/dt = Q_i$ となる。

(7.33) と比べるために、(7.31) で与えられる 4 元力 $F_\mu = qu^\rho F_{\mu\rho}$ を書き直してみよう。

$$F_\mu = qu^\rho(\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu) = q\left[\partial_\mu (u^\rho A_\rho) - \frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho}\right] = q\left[\partial_\mu (u^\rho A_\rho) - \frac{dA_\mu}{d\tau}\right]$$

すなわち

$$F_\mu = q\left[\partial_\mu (u^\rho A_\rho) - \frac{dA_\mu}{d\tau}\right] \tag{7.34}$$

と書ける (ポテンシャルを考えるときには、x^μ と $dx^\mu/d\tau = u^\mu$ は独立変数)。(7.33) と (7.34) を比べ、世界線のパラメーター λ を用いると、スカラーのポテンシャルとしては

$$\underline{U = -q\frac{dx^\mu}{d\lambda}A_\mu} \tag{7.35}$$

とすればよさそうである。このとき、スカラーのラグランジアンは (6.40) から

$$\boxed{\hat{L} = mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + q\dot{x}^\mu A_\mu} \tag{7.36}$$

となる。ただし、$\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$ とした。この $\hat{L}$ から導かれるラグランジュ方程式を求めよう。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = -mc\dfrac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu d\dot{x}^\nu}} + qA_\mu \\ \dfrac{\partial \hat{L}}{\partial x^\mu} = q\dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu \end{cases} \tag{7.37}$$

従って、ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-mc\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu d\dot{x}^\nu}} + qA_\mu\right) = q\dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu \tag{7.38}$$

となる。$d/d\lambda = (d\tau/d\lambda)(d/d\tau)$ を用いて、§6.5 のように固有時間についての微分に書き換えると

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q\left(u^\lambda \partial_\lambda A_\mu - \frac{dA_\mu}{d\tau}\right) \tag{7.39}$$

右辺は (7.34) によって力の μ 成分であるから、確かに運動方程式 (7.32) が導かれた。

7.9　ゲージ変換

7.9.1　ゲージ不変性

電場や磁場の様子は、すなわち、どのような電磁場があるかはその荷電粒子に対する作用で測定され、電場 $\mathbf{E}$ および磁場 $\mathbf{B}$、あるいは 4 次元的には、電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ で表される。4 元ベクトル・ポテンシャル A_μ は通常直接には測定されない $^{(\dagger)}$。それでは、電場 $\mathbf{E}$ および磁場 $\mathbf{B}$、あるいは、電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ が測定されれば、4 元ベクトル・ポテンシャル A_μ は一通りに決まるであろうか。**否である**。

さて、4 元ベクトル・ポテンシャル A_μ が与えられると、電磁場テンソルは (7.15) により

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{7.15}$$

と与えられた。ここで、スカラー関数 $\Lambda(x^\lambda)$ を用いて、新しいベクトル・ポテンシャル $\tilde{A}_\mu$ を次のように作ろう：

$$\underline{A_\mu \ \rightarrow \ \tilde{A}_\mu \equiv A_\mu + \partial_\mu \Lambda} \tag{7.40}$$

この $\tilde{A}_\mu$ によって与えられる電磁場テンソルを $\tilde{F}_{\mu\nu}$ とすると

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{A}_\mu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu = \partial_\mu A_\nu + \underline{\partial_\mu \partial_\nu \Lambda} - (\partial_\nu A_\mu + \underline{\partial_\nu \partial_\mu \Lambda}) = F_{\mu\nu} \tag{7.41}$$

となり、電磁場テンソルは不変である。スカラー関数 $\Lambda(x^\lambda)$ には、それらが (少なくとも)2 階微分可能であるという以外は何の制限もないから、与えられた電磁場テンソルに対して、無限個のスカラー関数 $\Lambda(x^\lambda)$ があることになる。(7.40) のように 4 元ポテンシャルを変えることを**ゲージ変換**という。スカラー関数 Λ はゲージ関数あるいはゲージ・パラメータといわれる。真空中のマックスウェル方程式はゲージ変換で不変である。ゲージ変換で不変な理論は**ゲージ不変な理論**といわれる。電場の源 j^μ がある場合には、源の物質に対するゲージ変換を適当に定めて、マックスウェル方程式がゲージ不変になるようにすることができるのであるが、この場合については省く。

$^{(\dagger)}$ (説明は省かざるを得ないが) 空間が通常と異なり (「単連結] でなく)、量子論的効果を考慮すると、ポテンシャルを測定できる場合があり、実際、外村達が測定した。この量子論的な効果をアハラノフ・ボーム効果という。

7.9.2　ゲージ固定

ゲージ不変性があるということは、電場や磁場の測定値が知られても、4 元ベクトル・ポテンシャル A_μ が理論的には一通りに決められないということである。すなわち、A_μ が測定値を与える 4 元ベクトル・ポテンシャルならば、(7.40) によって与えられる $\tilde{A}_\mu$ も同じ測定値を与える。このとき、Λ を適当に選べば、少なくとも $\tilde{A}_\mu$ の 1 つの成分を 0 にすることができる。言い換えれば、4 元ベクトル・ポテンシャル A_μ の成分はすべてが独立ではないということである。それでは、A_μ の独立な成分だけを用いてマックスウェルの方程式を書き直せばよいであろうか。このことは不可能ではないが、書き直した方程式は、当然テンソル

方程式ではなくなり、ゲージ不変性や**ローレンツ変換に対する不変性**$^{(*)}$は分かりにくくなる。方程式を、ゲージ不変な電磁場テンソルを用いて書いたので、これらの不変性が**視察**で分かるのである。そこで、通常は4元ベクトル・ポテンシャル A_μ に対して、新たに条件を付けてマックスウェルの方程式との連立方程式とする。例としては

$$\begin{cases} \partial_\mu A^\mu = 0 \text{：ローレンツ条件} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{：クーロン・ゲージ条件} \end{cases} \tag{7.42}$$

等がある。このような条件を**ゲージ条件**という。ゲージ条件を付け加えることを**ゲージを固定する**という。これはある条件を満たす A_μ を選び出すことなので、条件式はゲージ変換で不変ではいけない。ただし、ゲージを固定すれば、すなわち、一つの条件式を与えれば、それ以上のゲージ変換ができなくなるわけではない。例えば、上記のローレンツ条件を満たす A_μ を考えよう。さらにゲージ変換

$$A_\mu \ \to \ \tilde{A}_\mu \equiv A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

をすると

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu (\eta^{\nu\lambda} A_\lambda) = 0 + \Box \Lambda$$

だから

$$\Box \Lambda = 0 \quad \text{ならば} \quad \partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$$

となるので、ゲージ変換の関数 Λ には強い制限が付くが、一通りに決まらない。

$^{(*)}$ 相対性原理の要請の1つである『物理法則はすべての慣性系で同じ形の式で表される。』は『**物理法則はローレンツ変換に対して不変である**。』と言い換えることができる。不変性のある理論では、物理量 (一般座標) のすべてが物理法則 (電磁気学の場合は、マックスウェル方程式) から決まるとは限らない。不変性が明白な、例えば、テンソル方程式で表されている場合には、特にそうである。相対論における4元速度 u はその大きさが一定 $(u \cdot u = -c^2)$ だから、4つの成分はすべてが独立ではない。しかし、成分の1つを他の成分で表して、消去すると、方程式は一般に複雑になり、明白な共変性は失われる。

7.9.3　ゲージ変換群

ゲージ変換は2度以上行うことができる。

$$A_\mu \ \to \ \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda_1 \ \to \ \hat{A}_\mu = \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda_2$$

$$A_\mu \ \to \ \hat{A}_\mu = A_\mu + \partial(\Lambda_1 + \Lambda_2)$$

これは、$\Lambda_1 + \Lambda_2$ をゲージ関数として、1度ゲージ変換をしたのと同じである。言い換えれば、$\Lambda_1 + \Lambda_2$ をあらためて Λ とおけば

$$A_\mu \ \to \ \hat{A}_\mu = A_\mu + \partial \Lambda$$

となり、(7.40) と同じになる。すなわち、

『2 度のゲージ変換は新しい 1 度のゲージ変換と同じである。』

このことは、ゲージ変換の特徴の 1 つである。例えば、点 P_1 から車で点 P_2 まで移動し、次に点 P_3 まで徒歩で移動したとしよう。これを、点 P_1 からある 1 つの方法で点 P_3 まで移動する方法で置き換えることはできない。もちろん、方法を問わなければ可能である。ゲージ変換の場合には、ローレンツ条件を満たすゲージ関数と満たさないゲージ関数による 2 度のゲージ変換はローレンツ条件を満たす変換にはならない。

そこで, そこで、この特徴について詳しく調べ、一般化するために、すべてのゲージ変換からなる集合について考えよう。このときには、すでに見たように

(I) ゲージ変換を 2 度行った結果は、新しい 1 度のゲージ変換と同じである。
　このとき、新しいゲージ変換は 2 つのゲージ変換の積 (あるいは和) といわれる。

(II) あるゲージ変換をうち消すようなゲージ変換がある。
　上の例では、$\Lambda_1 + \Lambda_2 = 0$ とすればよい。このとき、Λ_2 によるゲージ変換は Λ_1 によるゲージ変換の**逆変換**であるという。

(III) (II) の 2 つの変換の結果は何もしないのと同じである。この場合にも (I) を成り立たせるために、何もしないのもゲージ変換の 1 つと考える。何もしない変換は**恒等変換**と呼ばれる。

このような性質を持つ集合は**群**であるという。

この例を一般化して、以下の条件が満たされているとき、その集合 S は群であるという (*)：

(ˆ) 集合 S の任意の 2 つの元 (要素ということもある) a、b (記号的には $\forall a, b \in S$) に対して、S の元 c を対応させる規則がある：$ab = c$ と記す。一般には $ab \neq ba$ である。このことを、集合 S に**積**が定義されているという。実際の演算が和でもよい (この場合には $ab = ba$ であり、ab を $a + b$ とも記す)。

(ˆ) **単位元**と呼ばれる 元 e で、任意の $a \in S$ に対して $ae = ea = a$ となる元がある。

(ˆ) 任意の元 a に対して $ax = xa = e$ となる元 x がある。この元は a の**逆元**と呼ばれ $\underline{a^{-1}}$ と記される。

上で見たように、ゲージ変換全体の集合は群の条件を満たしている。また、2 つの元 Λ_1、Λ_2 から作られる元 $\Lambda_1 + \Lambda_2$ はもちろん $\Lambda_2 + \Lambda_1$ に等しいので、$ab = ba$ の場合である。このとき、群は可換群 (あるいはアーベル群) といわれる。従って、ここで考えたゲージ変換全体の集合は 1 つの可換群 (アーベル群) である。

(*) (ˆ)、(ˆ)、(ˆ) 以外に積に関して、3 つの元 a, b, c に対して $a(bc) = (ab)c$(結合則という) が成立するということも、通常は条件に加えられる。

(ニュートリノに作用する場には、電荷を持った W 場と電気的に中性の Z 場がある。これらの場を表すベクトル・ポテンシャル (通常、W 場、あるいは、Z 場というときにはベクトル・ポテンシャルのことをいう) に対するゲージ変換は、2 つのポテンシャルを混ぜ合わせる変換を含み、一般には 2×2 行列で表される。行列の積は一般には可換ではないから、ゲージ変換全体は群ではあるが、可換群ではない。)

Chapter 8

ローレンツ群

8.1　ローレンツ変換の定義、ローレンツ群

ローレンツ変換を

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{8.1}$$

と表すとき、係数 $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$ から作られる行列 (Λ)

$$(\Lambda)_{\mu'\nu} \equiv \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \tag{8.2}$$

(上付きの添え字が前側の、行を表す添え字) および計量テンソルを表す行列 (η)、(4.55c)、を用いると、(8.1) が一般のローレンツ変換である条件は

$$(\eta) = (\Lambda^T)(\eta)(\Lambda) \tag{8.3}$$

であった ((4．60 b) 参照)。

『ローレンツ変換全体の集合を考えるということは、(8.3) を満たす行列全体の集合を考えることと同じである。』

そこで、どちらの集合も S で表し、その性質を調べよう。まず、次のような 2 つのローレンツ変換を考えよう：

$$x^{\mu} \to x^{\mu'} = \Lambda_1{}^{\mu'}{}_{\nu}\, x^{\nu} \to x^{\mu''} = \Lambda_2{}^{\mu''}{}_{\nu'}\, x^{\nu'} = \Lambda_2{}^{\mu''}{}_{\nu'}\, \Lambda_1{}^{\nu'}{}_{\lambda}\, x^{\lambda}$$

これは、変換

$$x^{\mu''} = \Lambda_2{}^{\mu''}{}_{\nu'} \Lambda_1{}^{\nu'}{}_{\lambda}\, x^{\lambda} \tag{8.4a}$$

を表す行列が、

$$(\Lambda_2)(\Lambda_1) \equiv (\Lambda_2\Lambda_1) \tag{8.4b}$$

であることを示している。各ローレンツ変換は間隔 ds^2 を変えないから、2 度のローレンツ変換でもは間隔 ds^2 は変わらない。従って、ローレンツ変換を 2 度行った変換もローレンツ

変換である。このことは、2 度のローレンツ変換に対応する行列 $(\Lambda_2)(\Lambda_1)$ も条件 (8.3) を満たしていなければならないということになる。実際、Λ_1、Λ_2 が (8.3) を満たしていれば

$$(\Lambda_2\Lambda_1)^T\eta(\Lambda_2\Lambda_1) = (\Lambda_1)^T\underline{(\Lambda_2)^T(\eta)(\Lambda_2)}(\Lambda_1) = (\Lambda_1)^T(\eta)(\Lambda_1) = (\eta) \tag{8.5}$$

となり、確かに

『2 つのローレンツ変換を表す行列の積は、これらの変換を引き続き行ったローレンツ変換の行列を表し、ローレンツ変換を表す行列が満たすべき条件 (8.3) を満たす。』

(∗)「ローレンツ変換を表す行列 (Λ)」という言い方は長いので、以下ではしばしば、「ローレンツ変換 (Λ)(あるいは、単に Λ)」ということにする。

上のことは、ローレンツ変換、あるいは、ローレンツ変換 (Λ) 全体の集合が群の条件 (Î) を満たすことを示している。群の条件 (IÎ) については何もしない変換、すなわち、恒等変換がローレンツ変換の単位元になり、単位行列 (E) あるいは E で表される：

$$(E)(\Lambda) = (\Lambda)(E) = (\Lambda) \tag{8.6}$$

さらに、条件 (IÎI) については、逆変換は必ず存在する。例えば、O 系から O' 系に変換し、その後 O' 系から O 系に変換すれば、変換しないのと同じ、すなわち、恒等変換になる。逆変換の行列は、もちろん、元の変換の行列 (Λ) の逆行列 (Λ^{-1}) である。この逆行列は、行列 (Λ) の行列式が 0 でなければ存在する。この行列式が 0 でないことは次のようにして示せる。(8.3) の両辺の行列式をとり、行列の積についての行列式の性質を用いると

$$\det(\eta) = \det(\Lambda^T)\det(\eta)\det(\Lambda), \quad \text{また} \quad \det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)$$

よって

$$[\det(\Lambda)]^2 = 1 \tag{8.7}$$

従って、(Λ) の逆行列は存在する。以上のことから、ローレンツ変換の全体、あるいは、ローレンツ変換の行列の全体、の集合は群である。この群は**ローレンツ群**と呼ばれる。

◇ ローレンツ不変性について

『物理法則がローレンツ不変である。』ということは、『物理法則を表す方程式が座標系によらない。』ということである。このことは、物体、あるいは、粒子の運動がどの座標系から見ても同じであるということでは、もちろんない。運動を表す量、例えば、速度や運動量はローレンツ変換を受ける。すなわち、『ある運動を表す方程式の解は座標系毎に異なる』のである。また、ローレンツ不変であるというときには、すべての座標系 (慣性系) の同等性は前提にされる。従って、すべての座標系において、同じ式で表される運動があるはずである。例えば、O 系と O' 系においてそれぞれの原点に静止している物体の運動は、$\mathbf{r} = 0$ および $\mathbf{r}' = 0$ のように同じ式で表される。しかし、これらの運動は異なった運動である。それでは、『ある運動の状態の座標系によらない特徴付けの方法』がないであろうか。ローレンツ不変量、すなわちスカラーを用いればよさそうである。しかし、例えば、4 元速度や 4 元

運動量のような最もよく用いられる物理量の場合には、スカラーであるそれらの大きさは一定であって、運動の状態を表すことはできない。このとき、ローレンツ変換全体が群であるということを利用することができる。その方法には、(座標) 回転の全体から成る回転群の場合が参考になる (回転群については付録 C 参照。ここでのためには C.1、C.2、C.3、C5.1、C5.3 を見ればよいであろう。余裕があれば、C.6 が参考になる。)

8.2 無限小ローレンツ変換

回転群や一般の群の場合にならって、無限小ローレンツ群について調べよう。
これまでと同様に、時空の原点を変えないローレンツ変換を考えよう。このような変換は 2 つの座標系の空間座標軸が互いに平行ならば、2 つの系の相対速度だけで決まる。従って、この変換は相対速度の成分である 3 つのパラメーターで表される。さらに、2 つの座標系の空間座標軸が互いに平行でないときには、それらは空間の原点のまわりの回転で関係付けられる。空間の回転は x、y、z 軸のまわりの回転の組み合わせで表されるから、3 つのパラメーターを含むが、慣性系の変換はしない。慣性系の変換を表す相対速度は、速度方向に x、y、z 軸のいずれかをとれば、相対速度の自由度は x、y、z 軸方向の 3 つのローレンツ変換で表すことができる。従って、原点を変えないローレンツ変換で独立なものは、x、y、z 軸方向へのローレンツ変換と、x、y、z 軸のまわりの回転とすることができる。

問 (1) ローレンツ変換 Λ が無限小変換のとき、$\epsilon \ll 1$ を用いて $\Lambda = E + \epsilon M$ とするとき、

$$M\eta + \eta M = 0 \quad \text{あるいは} \quad M = -\eta M \eta \tag{8.8}$$

であることを示せ。

(2) 2 つの無限小ローレンツ変換を $\Lambda_1 = E + \epsilon_1 M_1$ および $\Lambda_2 = E + \epsilon_2 M_2$ とするとき、この積は、無限小の 1 次までで

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = E + \epsilon_1 M_1 + \epsilon_2 M_2 \tag{8.9}$$

となることを示せ。すなわち

『無限小変換の積の計算は行列の和の計算をすればよい。』

8.2.1 3 次元無限小回転

3 次元の回転は 3×3 行列で表されるが、ローレンツ変換は 4×4 行列で表される。よって、回転をローレンツ変換の 1 つと見なすには 4×4 行列で表さなければならない。それには次のようにする：R を回転を表す 3×3 行列とするとき

$$R \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (\ R\ ) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \equiv (\Lambda_R) \tag{8.10}$$

とするのである。

このとき、z 軸のまわりの角度 ϵ の無限小回転は (C.17a) から

$$\Lambda_{R_z}(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(4) + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.11}$$

もちろん、$E(4)$ は 4×4 単位行列である。この右辺の第 2 項を ϵ で割った無限小でない行列を、z 軸のまわりの無限小回転の**生成子** (generator) といい、$-M_3$ あるいは $-M_z$ と記す (− 記号は後の便宜のため)。x 軸、y 軸のまわりの無限小回転の生成子についても同様である。これらの生成子の要素はまとめて次のように表される：

$$(M_i)_{jk} = \epsilon_{ijk} \ (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (M_i)_{0\mu} = 0 \tag{8.12}$$

例えば、$-M_3 = [\Lambda_{R_z}(\epsilon) - \Lambda_{R_z}(0)]/\epsilon$ であるから、**生成子は回転の際の変化率を与える**。また、(8．12) は行列 M_i が反対称行列である、$M_i^T = -M_i$、ことを示している。

8.2.2 x 方向のローレンツ変換

x 方向のローレンツ変換の行列 (Λ_x) は

$$(\Lambda_x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であった。v が小さいとき、ϵ と記して、その 1 次までとると

$$(\Lambda_x) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(4) + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.13}$$

となる。従って、回転の場合と同様に、x 方向の無限小ローレンツ変換の生成子を $-N_1$ あるいは $-N_x$ とすると

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

となる。y 方向、z 方向の無限小ローレンツ変換の生成子も同様にして求められ、それらの行列要素は次のように表される：

$$(N_i)_{\mu\nu} = \delta_{\mu 0}\delta_{\nu i} + \delta_{\mu i}\delta_{\nu 0} \tag{8.15}$$

さて、(8.12) や (8.15) 等は 3 次元的な表し方なので、4 次元的な表し方でまとめて表そう。z 軸のまわりの回転では xy 平面内の点はその平面内で変換される。xy 平面に平行な面内の

点も同様である。そこで、z 軸のまわりの回転という代わりに、xy 平面、あるいは、12–平面内の回転ということにしよう。そうすると、(8.12) は次のように書ける：

$$(M_{ij})_{\mu\nu} = \delta_i^\mu \eta_{j\nu} - \eta_{i\nu}\delta_j^\mu$$

同様に、x 方向のローレンツ変換を 01–平面内の" 回転 "と考えると、(8.15) は次のように書ける：

$$(M_{0i})_{\mu\nu} = \delta_0^\mu \eta_{i\nu} - \eta_{0\nu}\delta_i^\mu$$

まとめると

$$\underline{(M_{\mu\nu})_{\lambda\rho} = \delta_\mu^\lambda \eta_{\nu\rho} - \delta_\nu^\lambda \eta_{\mu\rho},} \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3) \tag{8.16}$$

となる。ただし、$(M_{\mu\nu}) = -(M_{\nu\mu})$ である。

8.3 Lie 代数

さて、$(M_{\mu\nu})$ が無限小ローレンツ変換の生成子であるということを特徴付ける方法はないであろうか。少々天下り的であるが、x 軸のまわりの無限小回転を $R_x(\epsilon_1)$、y 軸のまわりの無限小回転を $R_y(\epsilon_2)$ とするとき、$R_x(\epsilon_1)^{-1}R_y(\epsilon_2)^{-1}R_x(\epsilon_1)R_y(\epsilon_2)$ を考えよう。これももちろん、無限小回転である。(簡単のため、ここでは回転を 3×3 行列で表す。) この行列の積を無限小の 1 次まで計算すると、例えば

$$R_x(\epsilon_1)^{-1} = R_x(\epsilon_1)^T = E(3) + \epsilon(-M_1)^T + \frac{1}{2}\epsilon^2\left((-M_1)^T\right)^2 = E(3) + \epsilon M_1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 (M_1)^2$$

となるので [$\because\ (M_i)^T = -M_i$]

$$\begin{aligned} R_x(\epsilon_1)^{-1}R_y(\epsilon_2)^{-1}R_x(\epsilon_1)R_y(\epsilon_2) &\approx \Big(E(3) + \epsilon_1 M_1 + \frac{1}{2}\epsilon_1^2 (M_1)^2\Big)\Big(E(3) + \epsilon_2 M_2 + \frac{1}{2}\epsilon_2^2 (M_2)^2\Big) \\ &\quad \times\Big(E(3) - \epsilon_1 M_1 + \frac{1}{2}\epsilon_1^2 (M_1)^2\Big)\Big(E(3) - \epsilon_1 M_1 + \frac{1}{2}\epsilon_1^2 (M_1)^2\Big) \\ &= E(3) + \epsilon_1\epsilon_2(M_1M_2 - M_2M_1) = E(3) + \epsilon_1\epsilon_2[M_1, M_2] \end{aligned}$$

無限小回転は、一般に 3 つの M_i の一次結合で表せる。よって、$[M_1, M_2]$ もそうである。これは、任意の M_i の対についても同様である。従って、次のように書ける：

$$[M_i, M_j] = \sum_{k=1}^{3} f^k{}_{ij} M_k = \epsilon_{ij}{}^k M_k \tag{8.17}$$

この関係は、M_i を 4×4 行列を用いて表しても成り立つ。

問　このことを確かめよ。

同様に、x、y、z 方向の無限小ローレンツ変換 $^{(*)}$ の生成子 N_i に対しては

$$[N_i, N_j] = \epsilon_{ij}{}^k M_k \tag{8.18}$$

となる。さらに、次の交換関係も示せる：

$$[M_i, N_j] = \epsilon_{ij}{}^k N_k \tag{8.19}$$

(8.17)~(8.19) は生成子同士の交換関係が、また、生成子の一次結合で表されるということ (このことを、生成子の集合は交換関係に関して閉じているという。) を示している。このような集合は代数であるといわれ、特に、無限小変換の生成子の場合には **Lie 代数**といわれる。

(*) 一般に、(無限小でなくてよい)x、y、z 方向のローレンツ変換をそれぞれ x、y、z 方向の**ブースト**ということがある。N_i は無限小ブーストの生成子ということになる。

問　(8.18)、(8.19) を示せ。

生成子を (8.16) のように、$M_{\mu\nu}$ で表すと、(8.17)~(8.19) は次のように表せる：

$$\underline{[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho}} \tag{8.20}$$

問　(8.20) も導いてみよ。

問

$$\underline{K_i \equiv \frac{1}{2}(M_i + N_i) \quad \text{および} \quad L_i \equiv \frac{1}{2}(M_i - N_i)} \tag{8.21}$$

によって定義される、K_i と L_i を用いると、(8.17)~(8.19) あるいは (8.20) は次の形をとることを示せ：

$$\underline{[K_i, K_j] = \epsilon_{ij}{}^k K_k, \quad [L_i, L_j] = \epsilon_{ij}{}^k L_k, \quad [K_i, L_j] = 0} \tag{8.22}$$

8.4　スカラー場の座標変換

時空の点 (＝事象)P の関数 $\Phi(P)$ をスカラー場といった。ここでは、$\Phi(P)$ は複素数値でもよいとする。事象は座標系によらないので、このスカラー場も座標系によらない。しかし、具体的な計算をする場合には、座標系を用いて座標の関数として表す必要がある。いま、点 P の O 系での座標を x^μ、O' 系での座標を $x^{\mu'}$ とし、それぞれの座標を用いてこのスカラー場を表す関数を、$\phi(x^\mu)$、$\phi'(x^{\mu'})$ とすると、これらは $\Phi(P)$ に等しいから

$$\Phi(P) = \phi(x^\mu) = \phi'(x^{\mu'}) \tag{8.23}$$

が成り立つ。このスカラー場の特徴付けを座標系によらない方法ですることを考えよう。以下のような段取りでしてみる。

◇無限小変換におけるスカラー場の“ 見え方 ”の違い

これは $\phi(x^\mu)$ と $\phi'(x^{\mu'})$ の関数形の差で表される。z 軸のまわりの無限小回転を例にしてみてみよう。

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu = (E(4) - \epsilon M_3)^{\mu'}{}_\nu x^\nu \equiv x^\mu + \delta x^\mu$$

とすると

$$\delta x^\mu = \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \\ x^1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{あるいは} \qquad \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \\ x^1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.24}$$

である。求めている座標変換の際のスカラー場の (見え方の) 変化は

$$\underline{\delta\phi(x^\mu) \equiv \phi'(x^\mu) - \phi(x^\mu)} \tag{8.25}$$

によって表される。ここで、微小量の 1 次までとると

$$\phi'(x^\mu) = \phi'(x^{\mu'} - \delta x^\mu) = \phi'(x^{\mu'}) - \partial_{\lambda'}\phi'(x^{\mu'})\delta x^{\lambda'} = \phi(x^\mu) - \partial_\lambda\phi(x^\mu)\delta x^\lambda$$

よって

$$\delta\phi(x^\mu) = -\partial_\lambda\phi(x^\mu)\delta x^\lambda = \epsilon(x^2\partial_1 - x^1\partial_2)\phi(x^\mu)$$

これは**スカラー場に対する無限小回転の生成子** M_3 が

$$M_3(= M_z) = -(x^2\partial_1 - x^1\partial_2) = x^1\partial_2 - x^2\partial_1 = x\partial_y - y\partial_x \tag{8.26}$$

という微分演算子で表されることを示している。この式は量子力学における角運動量の z 成分の演算子に似ている。角運動量の z 成分の演算子は、(8.26) に $-i\hbar$ という定数をかけたものである。この定数の由来は次のようである：

$$\begin{cases} -i & ：\ \text{角運動量の演算子は物理量なので、エルミート演算子にするため} \\ & \quad (M_3\text{は反エルミート演算子}) \\ \hbar & ：\ \text{次元を角運動量のものにするため} \end{cases}$$

この、2 つの演算子の類似性は次のことを考えればもっともである：

『ある粒子の角運動量 (の z 成分) が大きいということは、早く回転しているということ』

⇒『すなわち、回転による変化率が大きい』

他方

『無限小回転の生成子は回転の際の変化率を表す』

従って、両者は基本的には同じことを表しているが、角運動量は単に変化率というだけではなく、その運動方程式が $\dfrac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ という分かり易い形になるように次元をもっているのである。(数学的には、($\boldsymbol{\ell} =$)$\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ は運動量 $\mathbf{p}$ のモーメントといわれる量である)。

(II) 量子力学で用いられる次の数学的結果を用いる

量子力学における波動関数はスカラー場の 1 つの例である。大ざっぱにいうと

『ある物理量の固有関数全体を考えると、それらを用いて任意の波動関数を展開できる。』

ことが知られている。(正確には、この物理量と可換な物理量があれば、これらの同時固有関数全体を用いて展開される。ここでは、以下に見るように、角運動量の大きさと z 成分が可換であることを用いる。) ここでは、物理量として角運動量の z 成分、ℓ_z を考える。固有値を λ、対応する固有関数を ϕ_λ とすると、

$$\ell_z\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$$

であるが (実際には、m を整数とすると $\lambda = m\hbar$ と表せる。)、この ϕ_λ を用いて、任意の波動関数 ϕ は

$$\phi = \sum_\lambda u_\lambda \phi_\lambda$$

と展開することができる。ただし、 ℓ_z の固有値が $m\hbar$ の固有関数は、量子力学的には" 1 つには決まらない "。角運動量の大きさ $\boldsymbol{\ell}^2$ の固有値 $\ell(\ell+1)\hbar^2$(ℓ は整数で、通常はこの ℓ の値で角運動量の大きさを表す) が $\ell \geq m$ となる状態は実現が可能で、このような ℓ を決めると状態は 1 通りに決まる。すなわち、実際には角運動量の大きさと、その z 成分の同時固有状態を用いて波動関数を展開する：

$$\boldsymbol{\ell}^2 \phi_{\ell m} = \ell(\ell+1)\hbar^2 \phi_{\ell m}, \quad \ell_z \phi_{\ell m} = m\hbar \phi_{\ell m} \tag{8.27}$$

(物理的にこのような展開が有用なのは、これらの物理量が保存される場合である。このときにはこれらの物理量はハミルトニアンと可換である。実際、波動関数を極座標を用いて表したとき、(8.27) は角度に関する部分の展開を表している。動径座標に関する部分は、通常エネルギーの固有関数で展開される。)

このような展開は、ベクトルを基底で展開するのに似ている。実際、固有関数は無限個あり、関数全体の集合を、無限次元のベクトル空間と見なすことができる。ところで

$$\boldsymbol{\ell}^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 \tag{8.28}$$

に対して

$$[\,\boldsymbol{\ell}^2,\, \ell_x\,] = [\,\boldsymbol{\ell}^2,\, \ell_y\,] = [\,\boldsymbol{\ell}^2,\, \ell_z\,] = 0 \tag{8.29}$$

が成り立つ。$\ell_i \propto M_i$ だから、上の式は $\ell_i \to M_i$ としても成り立つ。よって

$$\boldsymbol{\ell}^2 \left(M_i \phi_{\ell m}\right) = M_i \boldsymbol{\ell}^2 \phi_{\ell m} = \ell(\ell+1)\hbar^2 \left(M_i \phi_{\ell m}\right) \tag{8.30}$$

となる。すなわち、角運動量の大きさの固有値は無限小回転で変わらない。一般の回転は、無限小回転の繰り返しで表されるから、**角運動量の大きさの固有値は、回転で変わらない** (ベクトルの大きさだから当然ではあるが)。このことは

『角運動量の大きさがある値をもつ状態は、座標系の回転で不変な特徴を持つ状態である』

ということを意味している。(状態が変わらないということではない。m は変わる。)

(III) ブーストでも不変な状態

残念ながら、ℓ はブーストに対しては不変ではない ((8.19) 参照)。無限小ローレンツ変換として、無限小回転や無限小ブーストではなく、それらを組み合わせた、生成子が (8.21) で定義される K_i、L_i であるような無限小変換を考えてみよう。これらはそれぞれが、M_i と同じ交換関係を満たし、互いには可換だから、これらの大きさ

$$\sum_{i=1}^{3} K_i^2 \qquad \text{および} \qquad \sum_{i=1}^{3} L_i^2 \tag{8.31}$$

あるいは、角運動量の場合と同様に、これらに $(-i\hbar)^2$ をかけた量の大きさの固有値は、ローレンツ不変である。従って、これらの固有値、$K(K+1)\hbar^2$、$L(L+1)\hbar^2$ を用いて、スカラー場のローレンツ不変な特徴付けができる。角運動量の場合と同様に、実際には、の 2 つの演算子の同時固有状態 ϕ_{KL} が用いられる。

この K、L が物理的に何を表しているかが重要なのであるが、それについてはここでは省く。もちろん、角運動量に関係していて、静止系における角運動量、すなわち、スピンの大きさと関係していることだけを記しておこう。

8.5 ローレンツ群の部分群と連結成分

8.5.1 部分群

群である集合 S(G と記すことも多い) の部分集合 H が、それだけで群であるとき、H は S(あるいは G) の部分群であるという。H が部分群である (必要十分) 条件は

『<u>a、b を H の任意の 2 つの元とするとき $ab^{-1} \in H$ であることである。</u>』

問　H が上の条件を満たすとき、群になっていることを確かめよ。

例

(**1**) x、y、z 方向のブースト全体の集合は、それぞれが部分群である。
((2.38) の行列が (4.60b) を満たすことは確かめた。)

(**2**) 3 次元回転全体は 3 次元回転群あるいは直交群であった。従って、(8.10) の形の行列 Λ_R で表される変換全体の集合も部分群である。

(**3**) $\det\Lambda = 1$ であり、時間軸の方向変えない Λ 全体の集合は部分群である。

このことについては説明が必要であろう：
(8.6) から

$$\det\Lambda = \pm 1$$

である。ところで、恒等変換は単位行列 $E(4)$ で表され、$\det E(4) = 1$ である。また
無限小変換しても行列式が 1 から –1 に変わったり、その逆のことも起こらない。従って、恒等変換から、無限小変換を繰り返してできるローレンツ変換 Λ に対しては、すべて $\det\Lambda = 1$ である。

それでは、$\det\Lambda = -1$ となるのはどのような場合であろうか。

◇時間反転

時間軸の方向を変える変換

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

を時間反転という。この変換の行列 (Λ_T と記そう。この記法は万国共通ではない。単に T と記すことが多い。) の行列式は明らかに $\underline{-1}$ である。

◇空間反転

空間座標の符号を変える変換を空間反転 (あるいはパリティ変換) という。この変換の行列を Λ_P と記そう。x、y、z 座標のうちの 1 つだけの符号を変える変換も考えられる。このような変換は鏡映変換といわれる (x 軸に垂直な鏡に映すと、x 座標の符号が変わる)。

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \Lambda_P \, \vec{x}$$

この場合も明らかに $\underline{\det \Lambda_P = -1}$ である。

問　鏡映変換の行列の行列式も -1 であることを確かめよ。

◇ 時間と空間座標の符号を同時に変える変換は行列 $-E(4)$ で表され、$\det[-E(4)] = 1$ である。ただし、この変換は恒等変換から無限小変換を繰り返し行っても作れない。すなわち、無限小変換では、時間の向きは変わらない。実際、未来の光円錐中にあるベクトルは過去の光円錐中には変換されない。

上の例 (**3**) の部分群には $-E(4)$ で表される変換、およびさらにそれから無限小変換を繰り返して作られる変換は含まれない。従って、この例の部分群中の変換には、反転は含まれず、時間の方向は変わらない。この部分群は **(順時) 固有ローレンツ群**といわれる。(8.17)〜(8.19) の交換関係で特徴付けられる Lie 代数は、実はこの (順時) 固有ローレンツ変換群の Lie 代数である。

8.5.2　連結成分

あるローレンツ変換にさらに無限小ローレンツ変換を繰り返し行うことのよって、第 2 のローレンツ変換が得られたとしよう。このとき、2 つのローレンツ変換は**連結している**という。第 2 のローレンツ変換が元のローレンツ変換から無限小変換をどのように繰り返しても得られないとき、2 つのローレンツ変換は**連結していない**という。あるローレンツ変換に連結しているローレンツ変換全体の集合を、そのローレンツ変換を含む**連結成分**という。無限小ローレンツ変換をしても、行列式が ± 1 から ∓ 1 に変わることはないから、行列式が 1 のローレンツ変換と行列式が -1 のローレンツ変換は連結していない。従って、すべてのローレンツ変換は連結していないから、少なくとも 2 つの連結成分がある。それでは、例えば、行列式が 1 のローレンツ変換はすべて連結しているであろうか。上の◇印のところで記したように、行列 $-E(4)$ で表される変換は恒等変換とは連結していない。従って、行列式が 1 のローレンツ変換には、恒等変換を含む連結成分と、$-E(4)$ で表される変換を含む連結成分がある。恒等変換を含む連結成分は (順時) 固有ローレンツ群と一致する。行列式が -1 のローレンツ変換も、同様にして、時間の向きを変えない連結成分と変える連結成分がある。このようにローレンツ変換全体は 4 つの連結成分に分けられる。恒等変換を含む連結成分以

外は、群ではない。

問　この理由を考えて見よ。

各々の連結成分は一般にローレンツ群全体よりも簡単な“ 構造 ”をしている。特に、恒等変換を含む成分、すなわち、(順時) 固有ローレンツ群はそうである。一般に、ある群、あるいは、集合について調べるとき、全体をまとめて調べるよりも、適当な (簡単な程良い) 基準によって、連結成分、あるいは、部分群に分けて調べる方が簡単なことがある。

Chapter 9

おわりに

特殊相対性理論は物理学が扱うほとんどの現象に対して適用される壮大な理論である。ただ一つといってよいが、しかし重要な適用ができない現象がある。よく知られている、重力が関与する現象である。重力の理論は現代科学の最初の理論であり、重力の理論がなければ、現代科学の方法の正当性、重要性は認知されなかったであろう (少なくとも 17 世紀には)。

重力を相対性原理と整合させるには、重力そのものに対する認識を変える必要があった。キー・ポイントは**もし、重力しか作用していなければ、物体の区別はまったくできない**、ということである。重力以外の力は、それが作用すれば、物体を何かで区別する。例えば、ばねの力は、ばねで物体をはじくとき、物体が得る速さで、その質量が区別される。そこで、**重力は力ではなく、物体が運動する空間の性質**の影響であると考えよう、というのがアインシュタインのアイディアであった。空間の性質を幾何学的に表す方法として、19 世紀中頃に成立していた計量テンソルを用いるリーマン幾何学が用いられた。

問題は、ニュートンの重力理論では、重力は 1 つのポテンシャルで記述できたが、計量テンソルは 10 個の成分をもつということである。1 つのポテンシャルに対する重力源は、ガリレイ変換で不変な質量でよかったが、10 個の成分をもつ計量テンソルに対する源はやはり 10 個の成分をもたなければならない。アインシュタインの重力理論は、もちろん、ニュートンの重力理論の一般化である。後者における重力源である質量を基にして、アインシュタインが自ら見出した、質量とエネルギーの同等性を手がかりとして、10 個の成分をもつ重力源として、**エネルギー・運動量テンソル**に到達した。このエネルギー・運動量テンソルが、計量テンソルの 2 階の導関数を含むものから作られ、時空の曲がりを表す、10 個の成分をもつテンソルに比例する、ということを表すのがアインシュタインの重力場に対する方程式である。

新しい重力理論では、質量はもたなくても、エネルギーをもてば重力源になり、逆に重力の作用を受ける。例えば、**光も重力を受ける**のである。物体と同様に、重力中を「落下」すれば「運動エネルギー」が増加する。光は質量をもたないから、エネルギーはすべて運動エネルギーであり、従って、光は落下すると「青方偏移」する。逆に、重力場中を「上昇」すれば、「赤方偏移」する。また、重力場中を進めば一般に曲げられる (重力レンズ)。実際、アインシュタインの重力理論の最初の検証は、太陽による重力レンズ効果の観測であった。

さて、新しい重力理論では時空はミンコフスキー空間に限られないために、座標系も慣

性系に限ることは意味がない。そこで、相対性原理は

『物理法則は任意の座標系で同じ形に表される。』

という要請 (**一般相対性原理**) になる。このような形の物理法則は、特殊相対論における物理法則を表す方程式を求めたやり方に準じてなされる。特殊相対論的な効果は速さが光速に近い場合に大きくなる。逆に、速さが 0 のときには効果はない。従って、例えば、『MCR 系では、ニュートンの運動方程式が厳密に成り立つとして、その方程式をローレンツ変換に対するテンソル方程式で表す。』ことによって、特殊相対論における運動方程式が求められたのであった。一般相対性原理を満たすような物理法則を表す方程式を求めるには、まず、特殊相対論の場合の MCR 系に対応する、**重力が消える**座標系を用いる。このような座標系を考えるときに、よく用いられる例は、『ロープの切れたエレベーター』である。このときのエレベーター、その中の人、物はすべて同じ加速度をもち、重力以外の力 (例えば、床からの力) が作用しなければ、エレベーターに固定された座標系から見ると、重力は消えている。エレベーターは**自由落下**しているといわれる。しかし、日本のエレベーターと地球の反対側のエレベーターは逆向きに落下しているので、重力が消える系は日本の場合とは異なる。すなわち、重力が消える座標系は『場所によって違う』のである。ある点付近で重力が消える座標系を、その点付近の**局所慣性系**という。ここで、**等価原理**といわれる、次のことを要請する

『局所慣性系では、物理法則は特殊相対論と同じ形で表せる。』

特殊相対論のテンソルは、必ずしも一般座標変換でテンソルとは限らない。しかし、特殊相対論のテンソルを一般座標変換のテンソルに書き換えることができれば、一般座標変換のテンソルを用いて方程式を書くことができる。この 2 種類のテンソルの差は重力によって生じる。従って、局所慣性系では見かけ上この差はない。上の書き直しには、このことが利用される。そのためには、ある程度の数学的な準備が必要であるが、この数学が学習者を大いに悩ませるのである。しかし、現代科学は物理的考察を定量化する、すなわち、『式に乗せる』ことによってはじめて成立したのであるから、この数学は、アインシュタインの思想を科学に生まれ変わらせるために、なくてはならないものである。しかし、数学は理路整然とした学問であるから、『こつ』をのみこめば便利なものでもある。

問題は、特殊相対論を必要とする世界が、日常的な経験の世界とかけ離れていたように、この『面倒な』数学を必要とする世界が、やはり、日常的な経験とかけ離れていることであろう。前述の光の曲がりは、太陽によって光の進行方向がわずかに約 2 秒変わるというものであり。また、太陽の重力による惑星の運動については、最も影響の大きい水星について、回転角が 100 年間で約 43 秒ずれるというものである。しかし、自然界は広く、最近の宇宙観測の発達により、一般相対論を必要とする世界が身近な情報の中に入ってくる範囲が急速に拡がってきている。さらには、一般相対論の新たな検証、あるいは、修正までも研究対象になってきている。若い学生諸君がこの『困難な』学問に挑戦し、豊かな自然観を獲得することを大いに期待したい。

参考書

相対性理論の本の多くは一般相対性理論に重点がおかれている。特殊相対性理論について書かれたもの、および、特殊相対性理論について書かれた部分が多いものを上げておく。(1) はもともと、教科書に予定していたもので、明快に書かれており、現実的な応用例も豊富で、かつ、分量的にも手頃である。(2) は丁寧に書かれていて例題も豊富である。ただし、絶版中である。(3) の著者は相対論では日本の草分け的な存在の一人である。ほぼ半分が特殊相対論にあてられている。(4) は特殊相対論についてある程度のページを割いたものとしては、最新である。(5) の上巻は特殊相対論を扱っている。一般相対論を意識した記述になっているが、初学者には少し難しい。

(1) 風間洋一著「相対性理論入門講義」(培風館)

(2)W. リンドラー著 (小沢清智・熊野洋　訳)「特殊相対性理論」(地人書館)

(3) 内山龍雄著「相対性理論」(岩波書店)

(4) 松田卓也・二間瀬敏史著「なっとくする相対性理論」(講談社)

(5)R. シュッツ著 (江里口良治・二間瀬敏史訳)「相対論入門　上・下」(丸善)

Appendix A

関数としてのテンソル

少し数学的なことになるが、最近用いられ始めている考え方について紹介しておく。

A.1　共変ベクトルについて

A.1.1　基本的な性質

共変ベクトル A と反変ベクトル V から不変量 $A \cdot V$ を作っている (4.36) を共変ベクトル A は反変ベクトル V から実数 (スカラー)$A \cdot V$ を作っていると考えることができる。すなわち、

『共変ベクトル A は反変ベクトル V を変数とする関数』

であると考えるのである。このことを強調するとき、$A \cdot V$ を $A(V)$ と記すことがある (以下そうする)。このように考えるとき、スカラー a_1, a_2 を用いた

$$A_\alpha(a_1 V_1^\alpha + a_2 V_2^\alpha) = a_1 A_\alpha V_1^\alpha + a_2 A_\alpha V_2^\alpha$$

という関係式を、関数に対する関係式として表すと、関数が

$$\underline{A(a_1 V_1 + a_2 V_2) = a_1 A(V_1) + a_2 A(V_2)} \tag{A.1}$$

という性質を持つことになる。このとき、関数は**線形関数**であるといわれる。従って、

『共変ベクトルは反変ベクトルを変数とする線形関数である』

と考えることになる。この性質を用いると

$$A(V) = A(V^\alpha e_\alpha) = V^\alpha A(e_\alpha) \tag{A.2}$$

が成り立つ。このことは、

『共変ベクトルがどのような関数であるかは、基底ベクトルを変数としたときの値だけで決まる』

ことを意味している。(4.36) と比べると、各基底ベクトルを、変数としたときの関数値は共変ベクトルの成分に等しい。すなわち

$$\underline{A(e_\alpha) = A_\alpha}(\text{共変ベクトル } A \text{ の成分}) \tag{A.3}$$

A.1.2 関数の基底

共変ベクトルには基底があったが、基底に対応する関数はどのようなものであろうか？
基底で展開するには、関数の和やスカラー倍が必要なので、それらの定義から始める。これらも関数であるから、『任意の「変数」V に対する値 (実数) が定まれば、どのような関数であるかが定まる』ことになる。これらの値を次のように定める：
A、B を 2 つの共変ベクトルを表す関数とし、a をスカラーとするとき、任意の反変ベクトル (変数)V に対して

$$\begin{cases} \text{和} & : \quad (A+B)(V) \equiv A(V) + B(V) \\ \text{スカラー倍} & : \quad (aA)(V) \equiv a \times A(V) \end{cases} \tag{A.4}$$

により、和およびスカラー倍を定義する。

問　2 つの関数 A、B およびスカラー a に対して、$a(A+B) = aA + aB$ を示せ。

いま、関数に基底があるとして、共変ベクトルの場合と同じく ω^α と記そう。そうすると、任意の関数 A が

$$A = A_\alpha \omega^\alpha \tag{A.5}$$

のように展開されることになろう。ところで、関数は線形性を用いた (A.2) より、基底ベクトルを変数としたときの値で決まる。従って、e_β を変数としたときの ω^α の値 $\omega^\alpha(e_\beta)$ を求めよう。(A.5) が成り立つとして、両辺で変数を e_β にすると

$$A(e_\beta) = A_\alpha \omega^\alpha(e_\beta) \tag{A.6}$$

ここで、左辺は (A.3) から

$$\underline{A_\beta = \delta^\alpha_\beta A_\alpha} \tag{A.7}$$

となることを用いると、次式が得られる：

$$A_\alpha \left[\delta^\alpha_\beta - \omega^\alpha(e_\beta) \right] = 0$$

A_α は任意だから [　] 内は 0 でなければならない。従って

$$\underline{\omega^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta} \tag{A.8}$$

となる。また、$\omega^\alpha(e_\beta)$ は (A.3) で A を ω^α にしたものだから、$(\omega^\alpha)_\beta = \delta^\alpha_\beta$ とも表せる。従って、(A.8) を満たす ω^α を用いて、任意の関数 A を (A.5) のように展開することができ、その係数は $A(e_\alpha)$ で与えられる。これは (A.3) から共変ベクトルの成分に等しい。この係数を関数 A の成分という。

問　(A.7) を示せ。

まとめると、次のようにいうことができる：

『(i)　ベクトルを変数とし、スカラー値をとる線形関数 A 全体の集合は、和およびスカラー倍を (A.4) によって定義するとベクトル空間になり、
(ii)　その基底として (A.8) を満たす ω^α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ を用いることができ、
(iii)　A の成分 A_α は $A(e_\alpha)$ によって与えられる。』

(注)$A(V)$ はスカラーなので、座標系にはよらない。また、ベクトル V も座標系にはよらない (成分はよる)。従って、A も座標系によらないが、成分は座標変換される。この**座標変換は求めることができる**。共変ベクトルは、その成分の座標変換を用いて定義されたことと比較せよ。

問　関数 A の成分の座標変換を求めてみよ。

上で共変ベクトルと反変ベクトルの役割を入れ換えることもできる。すなわち、反変ベクトルを関数、共変ベクトルを変数と考えることもできる。このとき、関数はやはり、線形関数で、反変ベクトルの成分に対して $\underline{V(\omega^\mu) = V^\mu}$ が成り立つ。

共変ベクトルを関数と考えることを示すために、記号も A を $\tilde{A}$ とすることもある。また、反変ベクトルの記号も $\vec{V}$ を用いることがある：$\tilde{A}(\vec{V})$、$\vec{V}(\tilde{A})$ などと記す。このように、2 種のベクトルの同等なので、それを示すために $< A, V >$ と記すこともある。
なお、共変ベクトルを **1 形式**ともいう。この言い方も増えつつある。

A.2　2 階の共変テンソルについて

A.2.1　実数値 (スカラー) をとる関数

初めに、計量テンソルを例にして考えよう。2 つの反変ベクトル U、V のスカラー積は

$$U \cdot V = \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu \tag{4.57}$$

であった。これを

『η という関数は、2 つの反変ベクトル (上では U と V) を変数とし実数値 $\eta(U, V)$ を与える。』

と考えるのである：$\eta(U, V) \equiv \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu$。不変距離、ベクトルの大きさというスカラーは、それぞれ、

$$ds^2 = \eta(d\vec{x}, d\vec{x}), \quad V \cdot V = \eta(V, V) \tag{A.9}$$

と表されることになる。

一般の 2 階の共変テンソル T も同様に 2 つの反変ベクトルを変数とする関数と考える：

$$T(U, V) \equiv T_{\mu\nu} U^\mu V^\nu \tag{A.10}$$

この関数は、2 つの変数のいずれについても線形である：

$$T(a_1U_1 + a_2U_2, V) = a_1T(U_1, V) + a_2T(U_2, V)$$
$$\text{および} \tag{A.11}$$
$$T(U, b_1V_1 + b_2V_2) = b_1T(U, V_1) + b_2T(U, V_2)$$

このような関数は**双線形**あるいは**2 重線形**であるといわれる。この性質を用いると $U = U^\alpha e_\alpha$、$V = V^\alpha e_\alpha$ という展開を代入して

$$T(U, V) = U^\alpha V^\beta T_(e_\alpha, e_\beta) \tag{A.12}$$

となり、$T_(e_\alpha, e_\beta)$、すなわち、**基底ベクトルを変数としたときの値が分かれば、一般の反変ベクトルを変数とした場合の値が分かる**。この $T(e_\alpha e_\beta)$ は、(A.10) から共変テンソル T の成分 $T_{\alpha,\beta}$ に等しい。

問　(A.10) の右辺 $T_{\mu\nu}U^\mu V^\nu$ がスカラーであることを示せ。
ヒント：付録 **B** 参照。

問　(A.11) を示せ。

A.2.2　関数の基底

関数の成分は添え字を 2 つ持つから、基底があるとすれば、それらも添え字を 2 つ持つであろう。それらを $\omega^{\alpha\beta}$ とすると、任意の関数 T は

$$T = T_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} \tag{A.13}$$

のように展開されるであろう。共変ベクトルの場合と同様に、右辺は関数の和やスカラー倍を含むので、それらの定義をしよう：
T、T_1、T_2 を共変テンソルを表す関数とし、a をスカラーとするとき、任意の 2 つの反変ベクトル (変数)U、V に対して、和およびスカラー倍を、共変ベクトルの場合と同様に

$$\begin{aligned} \text{和} \quad &: \quad (T_1 + T_2)(U, V) \equiv T_1(U, V) + T_2(U, V) \\ \text{スカラー倍} \quad &: \quad (aT)(U, V) \equiv a \times T(U, V) \end{aligned} \tag{A.14}$$

によって定義する。

問　このとき、$a(T_1 + T_2) = aT_1 + aT_2$ を示せ。

さて、基底 $\omega^{\alpha\beta}$ がどのようなものかは、変数として基底ベクトルをとったときの値が分かればよいから、(A.13) が成り立つとし、変数として 2 つの基底ベクトル e_μ、e_ν をとろう。左辺は $T(e_\mu, e_\nu) = T_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu T_{\alpha\beta}$、右辺は $T_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}(e_\mu, e_\nu)$ だから、次式が得られる：

$$T_{\alpha\beta}\left[\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \omega^{\alpha\beta}(e_\mu, e_\nu)\right] = 0$$

ここで、$T_{\alpha\beta}$ は任意だから [　] 内は 0 でなければならない。よって

$$\omega^{\alpha\beta}(e_\mu, e_\nu) = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \tag{A.15a}$$

この右辺は、関数の基底 ω^α を用いて、$\omega^\alpha(e_\mu)\omega^\beta(e_\nu)$ と表せる。すなわち

$$\omega^{\alpha\beta}(e_\mu, e_\nu) = \omega^\alpha(e_\mu)\omega^\beta(e_\nu) \tag{A.15b}$$

右辺は、2 つの共変ベクトルの基底 ω^α、ω^β のテンソル積 $\omega^\alpha \otimes \omega^\alpha$ の成分に等しい。これに対応する関数も 2 つの関数 ω^α、ω^β のテンソル積と呼ぼう (同じ記号で表す)。従って

$$\underline{\omega^{\alpha\beta} = \omega^\alpha \otimes \omega^\beta} \tag{A.16}$$

すなわち

『2 階の共変テンソルに対応する関数の基底は、共変ベクトルに対応する基底のテンソル積で与えられる。』

これまでのことまとめると、次のようにいうことができる：

『(i) 2 つのベクトルを変数とする線形関数 T 全体の集合は、和およびスカラー倍を (A.14) によって定義するとベクトル空間になり、

(ii) その基底として $\omega^\alpha \otimes \omega^\beta$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ を用いることができ、

(iii) T の成分 $T_{\alpha\beta}$ は $T(e_\alpha . e_\beta)$ によって与えられる。』

A.2.3　共変ベクトルを値とする関数

再び計量テンソル η を考えよう。U、V を 2 つの反変ベクトルとするとき、$\eta(U, V)$ はスカラーであった。それでは、1 つの変数 U だけを用いた

『$\eta(U, \ )$ は何を表すであろうか？』

もう 1 つの変数 V を与えれば、スカラーになる。すなわち、反変ベクトルを変数としてスカラーを与えるから、共変ベクトルに対応する関数である。この関数を A とすると、任意の反変ベクトル V に対して

$$A(V) = \eta(U, V)$$

となる。成分を考えると

$$A_\mu V^\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu = \eta_{\mu\nu} U^\nu V^\mu$$

最後の変形では計量テンソルが対称テンソルであることを用いた。これより

$$V^\mu \left(A_\mu - \eta_{\mu\nu} U^\nu\right) = 0$$

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} U^\nu$$

従って、共変ベクトルに対応する関数 A の成分は、反変ベクトル U の成分の添え字を下げてできる共変ベクトルの成分に等しい。すなわち、

『計量テンソルは1つの反変ベクトルを変数とする関数と考えると、その添え字を下げて得られる共変ベクトルを値にとる。』

言い換えれば、

『計量テンソルは反変ベクトルを共変ベクトルに変える (数学的用語では、射像する)。』

ということになる。

計量テンソルの場合を一般のテンソルの場合にも拡張することができ

> 『2 階の共変テンソル T は1つの反変ベクトルを変数とし、共変ベクトルを与える線形関数であると考えることができる。』

ただし、この場合には得られた共変ベクトルはもとの反変ベクトルの添え字を下げたものとはならない。(テンソル T もある物理量を表しているときには、得られた共変ベクトルは 2 つの物理量の関数ということになる。)

以上のことは、一般のテンソルにも拡張できる：
$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ 型のテンソルは M 個の共変ベクトルと N 個の反変ベクトルを変数として実数値 (スカラー) をとる関数と考えることができる。この関数 (テンソル) の基底は

$$e^{\alpha_1 \cdots \alpha_N}_{\mu_1 \cdots \mu_M} \equiv e_{\mu_1} \otimes \cdots e_{\mu_M} \otimes \omega^{\alpha_1} \otimes \cdots \omega^{\alpha_N}$$

とすることができる。

Appendix B

定理の証明

定理

『 (i) V^μ を任意の反変ベクトルとし、A_μ を 4 つの数の集まりとする。このとき、$V^\mu A_\mu$ がスカラーならば A_μ は共変ベクトルの成分である。

(ii) V^μ を任意の反変ベクトルとし、$T_{\mu\nu}$ を 16 個の数の集まりとする。このとき、$V^\mu T_{\mu\nu}$ が共変ベクトルならば $T_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルの成分である。

(iii) V^μ を任意の反変ベクトルとし、$T_{\mu_1\cdots\mu_N}$ を 4^N 個の数の集まりとする。このとき、$V^{\mu_1}T_{\mu_1\cdots\mu_N}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ N-1 \end{pmatrix}$ 型のテンソルならば $T_{\mu_1\cdots\mu_N}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ 型のテンソルの成分である。』

証明

(i)：$V^\mu A_\mu$ はスカラーだから

$$V^{\mu'}A_{\mu'} = V^\mu A_\mu \tag{B.1}$$

V^μ は反変ベクトルだから

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\lambda V^\lambda \tag{B.2}$$

これを (B.1) の左辺に代入して、移項後まとめると

$$(\Lambda^{\mu'}{}_\lambda A_{\mu'} - A_\lambda)V^\lambda = 0 \tag{B.3}$$

ここで、$V^\mu A_\mu = V^\lambda A_\lambda$ を用いた。V^μ は任意であったから、(B.3) が成立するためには、(　) 内が 0 でなければならない。(問　何故か？) 従って、

$$\Lambda^{\mu'}{}_\lambda A_{\mu'} - A_\lambda = 0 \quad \text{あるいは} \quad A_\lambda = \Lambda^{\mu'}{}_\lambda A_{\mu'} \tag{B.4}$$

$\Lambda^{\mu'}{}_\lambda$ の逆行列 $\Lambda^\lambda{}_{\nu'}$ をかける (λ について和をとる) と、$\Lambda^\lambda{}_{\nu'}\Lambda^{\mu'}{}_\lambda = \delta^{\mu'}_{\nu'}$ だから

$$\underline{\Lambda^\lambda{}_{\nu'}A_\lambda} = \Lambda^\lambda{}_{\nu'}\Lambda^{\mu'}{}_\lambda A_{\mu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}A_{\mu'} = \underline{A_{\nu'}} \tag{B.5}$$

これは共変ベクトルに対する変換則である。　　　　　　　　　QED

(ii)：$V^\mu T_{\mu\nu}$ を A_ν とおくと、これは共変ベクトルだから

$$A_{\nu'} = \Lambda^\lambda{}_{\nu'} A_\lambda \quad 従って \quad V^{\mu'} T_{\mu'\nu'} = \Lambda^\lambda{}_{\nu'} V^\rho T_{\rho\lambda} \tag{B.6}$$

$V^{\mu'}$ に (B.2) を用い ($\lambda \to \rho$ として)、移項後まとめると

$$V^\rho (\Lambda^{\mu'}{}_\rho T_{\mu'\nu'} - \Lambda^\lambda{}_{\nu'} T_{\rho\lambda}) = 0 \tag{B.7}$$

V^ρ は任意だから、この式の (　) 内は 0 でなければならない。

$$\Lambda^{\mu'}{}_\rho T_{\mu'\nu'} - \Lambda^\lambda{}_{\nu'} T_{\rho\lambda} = 0 \quad あるいは \quad \Lambda^{\mu'}{}_\rho T_{\mu'\nu'} = \Lambda^\lambda{}_{\nu'} T_{\rho\lambda} \tag{B.8}$$

(i) の場合と同様に、$\Lambda^{\mu'}{}_\rho$ の逆行列 $\Lambda^\rho{}_{\sigma'}$ をかける (ρ について和をとる) と、

$$\Lambda^\rho{}_{\sigma'} \Lambda^{\mu'}{}_\rho T_{\mu'\nu'} = \Lambda^\rho{}_{\sigma'} \Lambda^\lambda{}_{\nu'} T_{\rho\lambda} \tag{B.8}$$

ここで

$$左辺 = \delta^{\mu'}_{\sigma'} T_{\mu'\nu'} = T_{\sigma'\nu'}$$

よって、$\sigma' \to \mu'$ と書き直すと、

$$T_{\mu'\nu'} = \Lambda^\rho{}_{\mu'} \Lambda^\lambda{}_{\nu'} T_{\rho\lambda} \tag{B.9}$$

これは、2 階の共変テンソルの変換則である。　　　　　　　　QED

(iii) についても同様である。

Appendix C

回　転　群

位置ベクトル ($\mathbf{r}$ と記す) の回転

$$\mathbf{r} \equiv (x, y, z) \ \longrightarrow \ \mathbf{r}' \equiv (x', y', z') \tag{C.1}$$

を考える。(x, y, z) は (x_1, x_2, x_3) あるいは (x^1, x^2, x^3) とも記す。

C.1　回転の特徴 (定義)

『ベクトルの長さを変えない。』

$\Rightarrow$ 2つのベクトルの長さの比を変えない

$\Rightarrow$ x', y', z' は x, y, z の1次式

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \tag{C.2}$$

あるいは

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{C.3}$$

◇ **行列表示**

$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad R \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad (R)_{ij} = a_{ij} \tag{C.4}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{r} \tag{C.5}$$

C.2　回転を表す行列の性質

ベクトルの元の長さは

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \tag{C.6}$$

回転後の長さは

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i'^2 \tag{C.7}$$

(C.3) を用いると、(C.7) の右辺は

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j\Big)^2$$

この右辺は (和の 2 乗の書き換え)

$$\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j\Big)^2 = \sum_{i=1}^{3}\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k\Big)\Big\} = \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j,k=1}^{3} a_{ij}a_{ik}x_jx_k\Big)$$

となるから、和の順序を入れ替えて

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{j,k=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik}\Big)x_jx_k \tag{C.8}$$

となる。(C.6) と (C.8) は同じだから

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \tag{C.9}$$

$a_{ij} = (R^T)_{ji}$ だから

$$(C.9) \text{ の左辺} = (R^TR)_{jk}$$

従って

$$R^TR = I \ (\text{単位行列}) \tag{C.10}$$

(C.10) を満足する行列は直交行列 (*) といわれる。すなわち

『回転を表す行列は直交行列である。』

(*) 直交行列において、各列から作られる 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

は互いに直交し、長さは 1 である。

C.3　回転を 2 度行う (回転群の導入)

$$\mathbf{r} \ \longrightarrow\ \mathbf{r}' \ \longrightarrow\ \mathbf{r}''$$

$$R_1 \qquad\qquad R_2$$

$$\mathbf{r}' = R_1\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'' = R_2\mathbf{r}' = R_2(R_1\mathbf{r}) = (R_2R_1)\mathbf{r}$$

成分では

$$
\begin{aligned}
x'_i &= \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \\
x''_i &= \sum_{j=1}^{3} (R_2)_{ij} x'_j \quad = \sum_{j=1}^{3} (R_2)_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{3} (R_1)_{jk} x_k \Big) \\
&\qquad\qquad\qquad = \sum_{j,k=1}^{3} (R_2)_{ij} (R_1)_{jk} x_k = \sum_{k=1}^{3} \Big(\sum_{j=1}^{3} (R_2)_{ij} (R_1)_{jk} \Big) x_k \\
&\qquad\qquad\qquad = \sum_{k=1}^{3} (R_2 R_1)_{ik} x_k
\end{aligned}
$$

従って

『変換 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}''$ を表す行列は、各回転を表す行列の**積** $R_2 R_1$ である。』

$\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}''$ は同じ長さだから、変換 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}''$ は回転である。
従って、行列 $R_2 R_1$ は直交行列で (C.10) を満足するはずである。実際、R_1 と R_2 が直交行列であること、すなわち、$R_1^T R_1 = R_2^T R_2 = I$ であることを用いると

$$
(R_2 R_1)^T (R_2 R_1) = R_1^T (R_2^T R_2) R_1 = R_1^T R_1 = I
$$

となる。従って、

『回転を２度行ったもの（２つの回転の積と定義する）は１つの回転である。』

行列を用いていえば

『直交行列の積は直交行列である。』

⇒　「回転全体の集合、あるいは、直交行列全体の集合において積が定義され、積もその集合に含まれる（積に関して集合は閉じているという）。」

◇ 特別な元

(i)　回転（変換）を行わない場合を角度 0 の回転あるいは**恒等変換**と考え、回転の集合に加える。すなわち

$$
\mathbf{r}' = \mathbf{r} \quad \text{行列では} \quad R = I \ (\text{単位行列})
$$

単位行列と任意の行列の積は $IR = R$ となるが、このような集合の元は**単位元**と呼ばれる。

(ii)　ある回転（行列 R_1 で表される）を元に戻す回転がある（行列 R_2 で表す）: **逆変換**

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{r} & \longrightarrow & \mathbf{r}' & \longrightarrow & \mathbf{r}'' = \mathbf{r} \\
& R_1 & & R_2 &
\end{array}
$$

$$
\mathbf{r}'' = R_2 R_1 \mathbf{r} = \mathbf{r} \quad \text{よって} \quad R_2 R_1 = I \quad \text{あるいは} \quad R_2 = R_1^{-1} (R_1 \text{ の逆行列})
$$

この逆行列あるいは逆変換は集合のことばでは**逆元**と呼ばれる。従って

『回転の集合は恒等変換（単位元）および逆変換（逆元）を含む。』

行列を用いると

『直交行列の集合は単位行列（単位元）および逆行列（逆元）を含む。』

◇ 群とは

『集合が積に関して閉じていて、単位元および逆元を含むとき、その集合は群をなす（群である）という。』

(3 次元) 回転全体の集合を **(3 次元) 回転群**という。

◇ 形式的な群の定義

集合 S が次の性質をもつとき群であるという。

(i) 任意の 2 つの元 a, b に対して、積 ($a \cdot b$ と記す) が定義され $a \cdot b \in S$ である（$a \cdot b$ も集合の元)。

(ii) 任意の元 a に対して $a \cdot e = e \cdot a = a$ となる元 e がある。e を単位元という。

(iii) 任意の元 a に対して $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ となる元 a^{-1} がある。a^{-1} を a の逆元という。

C.4　その他の群の例

２次元ベクトルの成分が複素数の場合

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

ベクトルの大きさ (の２乗) を

$$|\mathbf{v}|^2 \equiv |z_1|^2 + |z_2|^2 = z_1^* z_1 + z_2^* z_2 \tag{C.12}$$

と定義する (正の実数である)。行列を用いると

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}^{*T}\mathbf{v} = (z_1^*, z_2^*) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag*{(C.12)$'$}$$

と表せる。

・ベクトルの変換（線形変換、一次変換）を次のように表す：

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{v}' = M\mathbf{v}, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{C.13}$$

◇ 長さを変えない変換

$$\left(\begin{array}{l} z_1' = \alpha z_1 + \beta z_2 \\ \\ z_2' = \gamma z_1 + \delta z_2 \end{array} \right. , \quad \left(\begin{array}{l} z_1'^* = \alpha^* z_1^* + \beta^* z_2^* \\ \\ z_2'^* = \gamma^* z_1^* + \delta^* z_2^* \end{array} \right.$$

だから

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}'|^2 = z_1'^* z_1' + z_2'^* z_2' \quad &= (\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma) z_1^* z_1 + (\beta^*\beta + \delta^*\delta) z_2^* z_2 \\ &\quad + (\alpha^*\beta + \gamma^*\delta) z_1^* z_2 + (\beta^*\alpha + \delta^*\gamma) z_2^* z_1 \end{aligned}$$
$$= |\mathbf{v}|^2 = z_1^* z_1 + z_2^* z_2$$

よって

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \beta^*\beta + \delta^*\delta = 1 \\ \\ \alpha^*\beta + \gamma^*\delta = 0 \end{array} \right. \tag{C.14}$$

行列を用いると

$$\mathbf{v}'^T = \mathbf{v}^T M^T, \quad (\mathbf{v}'^T)^* = (\mathbf{v}^T)^* M^\dagger, \quad M^\dagger \equiv (M^T)^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

よって

$$(\mathbf{v}'^T)^* \mathbf{v}' = (\mathbf{v}^T)^* M^\dagger M \mathbf{v} = (\mathbf{v}^T)^* \mathbf{v}$$

従って

$$\underline{M^\dagger M = I} \tag{C.15}$$

(M が実行列ならば $M^\dagger = M^T$ ：直交行列)

問　(C.14) が成立すれば (C.15) が成立することを確かめよ。

(C.15) を満たす行列を（２行２列、あるいは、２ x ２の）ユニタリー行列という。ユニタリー行列の全体を S とする。(ユニタリー行列は M の代わりに U と記されることも多い：後出)

$M_1, M_2 \in S$ とするとき、行列の積を用いて、それらの積 $M = M_1M_2$ が作れる。
M はユニタリー行列であるか？

$$M^\dagger M = (M_2M_1)^\dagger (M_2M_1) = M_1^\dagger (M_2^\dagger M_2)M_1 = M_1^\dagger M_1 = I$$

よって、

『ユニタリー行列の積はユニタリー行列である。』$\cdots\cdots$ (i)

また、明らかに $I^\dagger I = I$。よって

『単位行列はユニタリー行列である。』$\cdots\cdots$(ii)

$M \in S$ に対して $M^\dagger M = MM^\dagger = I$ だから $M^{-1} = M^\dagger$ 、また

$$(M^{-1})^\dagger M^{-1} = (M^\dagger)^\dagger M^\dagger = MM^\dagger = I$$

だから

『逆行列はユニタリー行列である。』$\cdots\cdots$(iii)

従って

『(i),(ii),(iii) からユニタリー行列全体の集合は群をなす。』

この群を（２次）ユニタリー群といいと $U(2)$ 記す。

C.5 無限小回転

回転群について調べるときには、一般の変換よりも無限小変換について調べると便利なことが多く、よく用いられる方法である。無限小変換とは、例えば、z 軸のまわりの $30°$ の回転を 100 等分して $0.3°$ の回転の 100 回の繰り返しと考えるとき、$0.3° = \pi/600(\mathrm{rad})$ は無限小として扱おうというのである。一般に有限の回転は無限小回転を必要なだけ繰り返せばよいと考える。無限小回転を扱う利点は計算が簡単になるということである。たとえば、z 軸のまわりに $30°$ 回転し、次に x 軸のまわりに $30°$ 回転したとしよう。z 軸のまわりの $30°$ 回転、および x 軸のまわりの $30°$ の回転は、それぞれ行列

$$R_z(30) = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° & 0 \\ \sin 30° & \cos 30° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_x(30) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30° & -\sin 30° \\ 0 & \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} \tag{C.16}$$

で表され、上記の 2 度の回転の結果は行列の積 $R_x(30)R_z(30)$ で表される。すなわち、行列の積の計算が必要である。ところが、z 軸のまわりの回転角が無限小の ϵ_1 で、x 軸のまわりの回転角が無限小の ϵ_2 であるときには、$\sin\epsilon_i \approx \epsilon_i$、$\cos\epsilon_i \approx 1$ $(i = 1, 2)$ を用いると

$$R_z(\epsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(3) + \epsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.17a}$$

および

$$R_x(\epsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\epsilon_2 \\ 0 & \epsilon_2 & 1 \end{pmatrix} = E(3) + \epsilon_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.17b}$$

となる。ただし、$E(3)$ は 3×3 の単位行列である。これより、積 $R_x(\epsilon_2)R_z(\epsilon_1)$ は無限小の 1 次までとれば

$$R_x(\epsilon_2)R_z(\epsilon_1) = E(3) + \epsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、行列の和を計算すればよい。これは大変な簡単化である。このようなことは、ここでの特別な場合だけではなく、一般の無限小回転の積に対しても成り立つのである。

C.5.1 無限小回転の生成子

z 軸の回り（xy 平面内）の角度 θ の回転を表す行列は

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.18}$$

θ が小さい (ϵ とする) とき (z 軸の回りの無限小回転)

$$R \approx \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.19}$$

これは単位行列から“ ϵ” だけずれている。一般の無限小回転は同様にして

$$R = I + \epsilon M \tag{C.20}$$

と表せる。

$$R^T = I + \epsilon M^T$$

だから、この無限小回転 R が回転を表す条件 (C.10) は

$$(I + \epsilon M^T)(I + \epsilon M) \approx I + \epsilon(M + M^T) = I$$

よって

$$\underline{M + M^T = 0} \tag{C.21}$$

従って、M は反対称行列であり、次のように書ける

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.22}$$

ここで

$$M_x \equiv - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y \equiv - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_z \equiv - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.23}$$

はそれぞれ x, y, z 軸の回りの**無限小回転の生成子**といわれる。(生成子を省略して、単に、無限小回転と言うこともあるが、“ 無限小 ”ではないことに注意。ϵ をかけたものが無限小。)

(*)　生成子の英語は generator

◇ 無限小回転の積

$$R_1 R_2 = (I + \epsilon_1 M_1)(I + \epsilon_2 M_2) \approx I + (\epsilon_1 M_1 + \epsilon_2 M_2) \tag{C.24}$$

　⇒ 『**無限小回転の積は無限小行列の和で表される!**』

C.5.2　回転軸

ある回転には必ず回転軸がある。回転軸上のベクトルは回転によって不変である。すなわち

$$R\mathbf{r} = \mathbf{r} \quad \text{あるいは} \quad (R - I)\mathbf{r} = 0 \tag{C.25a}$$

が成立する。このことは、回転軸上のベクトルは行列 R の固有値が 1 の固有ベクトルであるということである。これらのことを確かめよう。

$\mathbf{r} \neq 0$ なる解があるための必要十分条件は

$$\det(R - I) = 0 \tag{C.26a}$$

である。一般に固有値が λ の固有ベクトル $\mathbf{r}$ に対しては

$$R\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \quad \text{あるいは} \quad (R - \lambda I)\mathbf{r} = 0 \tag{C.25b}$$

が成立する。$\mathbf{r} \neq 0$ なる解があるための必要十分条件は前と同様に

$$\det(R - \lambda I) = 0 \tag{C.26b}$$

である。固有値 λ で 1 となるものがあることを示せばよい。(4–4) 式の行列 R に対する表式を用いれば、この式は

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{C.26c}$$

となる。行列式を展開すると

$$-\lambda^3 + (Tr\ R)\lambda^2 - \left[\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right]\lambda + \det R = 0 \tag{C.27}$$

これはに λ ついての 3 次方程式であるから必ず実根をもつ。この実根が 1 を含むことを示そう。ここで、λ の 1 次の係数の [ ] 内のうち第 1 項の行列式は a_{11} の小行列式だから R の (1,1) 成分 $\times \det R$ である。ところで

$$R^T R = I \quad \text{だから} \quad \det R^T \cdot \det R = (\det R)^2 = 1 \quad \text{よって} \quad \det R = \pm 1 \tag{C.28}$$

従って、反転 $(\mathbf{r} \to -\mathbf{r} = -I\mathbf{r})$ を考えなければ $\det R = 1$ である。また、$R^{-1} = R^T$ だから

$$R^{-1}\text{の対角成分} = R\,\text{の対角成分}$$

従って

$$[\quad]\,\text{内の第 1 項} = R^{-1}\text{の}\ (1,1)\ \text{成分} \times \det R = a_{11}$$

同様にして

$$[\quad]\,\text{内の第 2 項} = a_{22}\text{、} \qquad [\quad]\,\text{内の第 3 項} = a_{33}$$

以上から、λ の 3 次方程式は次のようになる：

$$\lambda^3 - (Tr\,R)\lambda^2 + (Tr\,R)\lambda - 1 = (\lambda - 1)[\lambda^2 + (1 - Tr\,R)\lambda + 1] = 0 \tag{C.29}$$

これより、$\lambda = 1$ は確かに根である。すなわち、R は固有値 1 を持ち回転軸は確かにある。

$$☆\left\{\begin{array}{l} \text{回転軸方向の単位ベクトルが}\ \mathbf{e} \equiv (\alpha, \beta, \gamma),\ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1) \\ \text{回転角が}\ \theta \end{array}\right. \tag{C.30}$$

である回転を表す行列を $R(\mathbf{e}; \theta)$ とする。

さて、回転軸が $\mathbf{e}$ であり、回転角がそれぞれ θ_1 と θ_2 である回転をつづけて行うと、同じ回転軸の回りの回転角が $\theta_1+\theta_2$ の回転になる：

$$R(\mathbf{e};\theta_2)R(\mathbf{e};\theta_1)=R(\mathbf{e};\theta_2+\theta_1) \tag{C.31}$$

いま、$\theta_1=\theta$、$\theta_2=d\theta$ とすると

$$R(\mathbf{e};d\theta)=I+d\theta\,M\ (M^T=-M)$$

と書けるから

$$(I+d\theta\ M)R(\mathbf{e};\theta)=R(\mathbf{e};\theta+d\theta)$$

よって

$$\frac{dR(\mathbf{e};\theta)}{d\theta}=M\,R(\mathbf{e};\theta) \tag{C.32}$$

次に M を求める：
角度 $d\theta$ の回転でベクトル $\mathbf{r}$ の変化 $d\mathbf{r}$ は $\mathbf{e}$ および $\mathbf{r}$ の両方に垂直だから

$$d\mathbf{r}\propto\mathbf{e}\times\mathbf{r} \tag{C.33}$$

比例定数は次のようにして決められる：$\mathbf{e}$ と $\mathbf{r}$ のなす角を ϕ とすると

$$|d\mathbf{r}|=r\sin\phi d\theta,\quad \text{および}\qquad |\mathbf{e}\times\mathbf{r}|=|\mathbf{e}||\mathbf{r}|\sin\phi=r\sin\phi$$

だから、上の比例係数は $d\theta$ となる。よって $d\mathbf{r}=d\theta\,M\mathbf{r}=d\theta\,\mathbf{e}\times\mathbf{r}$ より

$$\mathbf{e}\times\mathbf{r}=M\mathbf{r}. \tag{C.34}$$

この左辺は (5–13) を用いて

$$\mathbf{e}\times\mathbf{r}=\begin{pmatrix}\beta z-\gamma y\\ \gamma x-\alpha z\\ \alpha y-\beta x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\gamma&\beta\\ \gamma&0&-\alpha\\ -\beta&\alpha&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

よって

$$M=\begin{pmatrix}0&-\gamma&\beta\\ \gamma&0&-\alpha\\ -\beta&\alpha&0\end{pmatrix}=\underline{\alpha M_x+\beta M_y+\gamma M_z}\equiv M(\mathbf{e}) \tag{C.35}$$

これを用いると、(C.32) の解は次のようになる:

$$R(\mathbf{e};\theta)=\exp[\theta\,M(\mathbf{e})]\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}M^n(\mathbf{e}) \tag{C.36}$$

問　(C.36) が (C.32) の解であることを示せ：項別微分可能とする。

このように、直交行列 R は反対称行列 M の「関数」として表される。無限小回転の積は M の１次結合で表せ、その際 M_x,M_y,M_z が基底となっている。
このように一般の回転よりも無限小回転のほうが簡単なので、一般の回転を考える代わりに無限小回転を考えることが多い。

C.5.3　構造定数

回転の全体が群をなすということを、無限小回転（の生成子）M を用いて表すとどのようになるであろうか。
いま、x 軸のまわりの無限小回転 R_1、および、y 軸のまわりの無限小回転 R_2、を考える。R_1、R_2 は、それぞれ、(C.35) で $\alpha = 1$、$\beta = \gamma = 0$; $\theta = \epsilon_x$ および $\beta = 1$、$\alpha = \gamma = 0$; $\theta = \epsilon_y$ として、次のように表せる：

$$R_1 = \exp(\epsilon_x M_x), \quad R_2 = \exp(\epsilon_y M_y)$$

このとき、次の積を作る：

$$\begin{aligned} R_1 R_2 R_1^{-1} R_2^{-1} &\approx (I + \epsilon_x M_x + \frac{1}{2}\epsilon_x^2 M_x^2)(I + \epsilon_y M_y + \frac{1}{2}\epsilon_y^2 M_y^2) \\ &\quad \times (I + \epsilon_x M_x^T + \tfrac{1}{2}\epsilon_x^2 (M_x^T)^2)(I + \epsilon_y M_y^T + \tfrac{1}{2}\epsilon_y^2 (M_y^T)^2) \end{aligned}$$

となる。ここで、R_1, R_2 は直交行列であるということから

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1^{-1} = R_1^T = [\exp(\epsilon_x M_x)]^T \approx [I + \epsilon_x M_x + \frac{1}{2}\epsilon_x^2 M_x^2]^T = I + \epsilon_x M_x^T + \frac{1}{2}\epsilon_x^2 (M_x^T)^2 \\ \\ R_2^{-1} = R_2^T = [\exp(\epsilon_y M_y)]^T \approx [I + \epsilon_y M_y + \frac{1}{2}\epsilon_y^2 M_y^2]^T = I + \epsilon_y M_y^T + \frac{1}{2}\epsilon_y^2 (M_y^T)^2 \end{array} \right.$$

となることを用いた。さらに、$M_x^T = -M_x$(反対称性), $(M_x^T)^2 = M_x^2$ などを用いると

$$R_1 R_2 R_1^{-1} R_2^{-1} = I + \epsilon_x \epsilon_y (M_x M_y - M_y M_x) = I + \epsilon_x \epsilon_y [M_x, M_y]$$

となる。これは１つの無限小回転だから $I + \epsilon_x \epsilon_y M$; $M \equiv [M_x, M_y]$ と書くと、M は反対称行列で $M_x,\ M_y,\ M_z$ で展開できるはずである。この展開を次のようにおく：

$$M = [M_x, M_y] = f_{xy}^x\, M_x + f_{xy}^y\, M_y + f_{xy}^z\, M_z \tag{C.37a}$$

$[M_y, M_z],\ [M_z, M_x]$ についても同様である。(M_x, M_y, M_z) を (M_1, M_2, M_3) と記すと、3 つの場合をまとめて

$$[M_i, M_j] = \sum_{k=1}^{3} f_{ij}^k\, M_k \equiv f_{ij}^k\, M_k,\ (\textstyle\sum \text{を略す}) \quad (i, j, = 1, 2, 3) \tag{C.37b}$$

と表せる。ここで、$f_{ij}^k = -f_{ji}^k$ は群によって決まり、群の**構造定数**といわれる。
(C.37) 式が無限小回転を用いて表した群の条件である。このように、ある変換群 (ここでは回転群) の無限小変換の生成子 (行列) は、その群に対応した交換関係を満たす。
(C.37) のように１次結合が作れ、ある定まった交換関係を満たすものの集合は **(Lie) 代数**と呼ばれる。上の例は、回転群に付随する Lie 代数といわれる：

「群に付随する Lie 代数がどのようなものかは、構造定数で決まる。」

具体的に計算すると

$$[M_x, M_y] = M_z, \quad \text{よって} \quad f_{12}^1 = f_{12}^2 = 0, \quad f_{12}^3 = 1 \tag{C.38a}$$

同様にして

$$[M_y, M_z] = M_x, \quad [M_z, M_x] = M_y \quad \text{よって}$$
$$f^1_{23} = 1,\ \ f^2_{23} = f^3_{23} = 0;\ \ f^1_{31} = f^3_{31} = 0,\ \ f^2_{31} = 1\text{。} \tag{C.38b}$$

あるいは、i, j, k について完全反対称な ϵ_{ijk}, $\epsilon_{123} = 1$ を用いると

$$f^i{}_{jk} = \epsilon_{ijk} \tag{C.38c}$$

この f^i_{jk} は回転群の性質を表し、回転群の**構造定数**と呼ばれる。

◇ 無限小変換の固有値、固有ベクトル

無限小変換 (の生成子)M の固有値を ρ、固有ベクトルを $\mathbf{r}$ とすると

$$M\mathbf{r} = \rho\mathbf{r} \tag{C.39}$$

M を（左から）かけると

$$M^2\mathbf{r} = M(M\mathbf{r}) = M(\rho\mathbf{r}) = \rho^2\mathbf{r}$$

となる。これを繰り返すと

$$M^n\mathbf{r} = \rho^n\mathbf{r}$$

となるから

$$R\mathbf{r} = \exp(\theta M)\mathbf{r} = \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} M^n\Big]\mathbf{r} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta\rho)^n}{n!}\Big)\mathbf{r} = e^{\rho\theta}\mathbf{r} \tag{C.40}$$

よって、無限小回転 (の生成子) の固有ベクトルは有限の回転の固有ベクトルでもある。
(無限小回転で方向が変わらなければ、それを繰り返した有限の回転でも方向が変わらない。)
ここで、 $R\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$ とすると

$$\lambda = e^{\rho\theta} \tag{C.41}$$

従って、無限小回転の (生成子) 固有値が分かれば一般の回転の固有値も分かる。

C.6 見方を変える

C.6.1 座標変換

ベクトルを回転する変わりに座標系を回転する（座標変換)。この場合には

『ベクトルは変わらないが、ベクトルの見え方 (成分) が変わる。』

例えば、元の座標系で x 軸方向を向いていたベクトルは z 軸のまわりに座標系を回転すると、回転後の座標系では x' 軸上にはない。

ベクトル $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ と回転するとき $\mathbf{r}'$ の成分を (x', y', z') とする。ベクトル $\mathbf{r}$ の成分が (x', y', z') であるような座標系は行列 R^{-1} を用いた座標変換で求められる。すなわち、ベクトルを回転する行列 $R(R^{-1})$ に対応する座標を回転する行列はその逆行列 $R^{-1}(R)$ になる。

◇ ベクトルの座標変換 (座標回転によるベクトルの成分の変換)

ベクトルで表される物理量には位置のほかに速度 $\mathbf{v}$、運動量 $\mathbf{p}$、角運動量 $\mathbf{l}$ などがある。

一般のベクトル量 $\mathbf{A}$ について、元の座標系から見たものを $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$、回転後の座標系から見たものを $\mathbf{A}' = (A'_x, A'_y, A'_z) = (A'_1, A'_2, A'_3)$、と記すと、これらの関係、すなわち、座標変換は

$$\mathbf{A}' = R\mathbf{A} \tag{C.42a}$$

成分を用いると

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad A'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_j \tag{C.42b}$$

◇ スカラー場の座標変換

スカラー場 Φ は空間の点 P を与えるとそのとる値 $\Phi(P)$ が決まる。
この値は座標系によらない。ある座標系において点 P の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とすると、点 P における値は

$$\Phi(P) = \phi(\mathbf{r}) \tag{C.43}$$

表せる。これは $\mathbf{r}$ の座標 (x, y, z) の関数である。座標変換（回転）によって $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ とすると、座標の関数としての関数形は一般に変わり、

$$\Phi(P) = \phi'(\mathbf{r}')$$

となる。従って

$$\phi'(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}) \quad \text{あるいは} \quad \phi'(\mathbf{r}) = \phi(R^{-1}\mathbf{r}) \tag{C.44}$$

がスカラー場の座標変換である。

◇ 無限小変換

$$R = I + \epsilon M, \quad M = \alpha M_x + \beta M_y + \gamma M_z; \quad R^{-1} = I - \epsilon M \tag{C.45}$$

☆ $\alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0$ のとき

$$R^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{r} - \epsilon M_x \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

よって

$$\phi'(\mathbf{r}) = \phi(R^{-1}\mathbf{r}) = \phi(x, y + \epsilon z, z - \epsilon y) = \phi(x, y, z) + \epsilon \Big[\frac{\partial \phi}{\partial y} z - \frac{\partial \phi}{\partial z} y\Big]$$

従って、スカラー場の見え方の変化 $\delta\phi(\mathbf{r})$ は

$$\delta\phi(\mathbf{r}) \equiv \phi'(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = -\epsilon\Big(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\Big)\phi \equiv \epsilon \hat{M}_x \phi \tag{C.46}$$

となる。ここで

$$\hat{M}_x \equiv -\Big(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\Big) \tag{C.47a}$$

同様にして

$\beta = 1,\ \alpha = \gamma = 0$ のとき

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \epsilon \hat{M}_y \phi, \quad \hat{M}_y \equiv -\Big(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\Big) \tag{C.47b}$$

$\gamma = 1,\ \alpha = \beta = 0$ のとき

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \epsilon \hat{M}_z \phi, \quad \hat{M}_z \equiv -\Big(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\Big) \tag{C.47c}$$

となる。すなわち、スカラー場に対する無限小回転は微分演算子 $\hat{\mathbf{M}} = (\hat{M}_x, \hat{M}_y, \hat{M}_z)$ を用いて表される。

無限小変換に対する、群である条件 (5–20) を調べる：

$$\begin{aligned}
[\hat{M}_x, \hat{M}_y]\phi(\mathbf{r}) &= \Big(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\Big)\phi(\mathbf{r}) - \Big(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\Big)\phi(\mathbf{r}) \\
&= -\Big(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\Big)\phi(\mathbf{r}) = \hat{M}_z \phi(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

よって

$$[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = \hat{M}_z, \quad \text{同様にして} \quad [\hat{M}_y, \hat{M}_z] = \hat{M}_x, \ \ [\hat{M}_z, \hat{M}_x] = \hat{M}_y \tag{C.48}$$

従って、群の条件は確かに成り立つ。

C.6.2 角運動量

角運動量 $\vec{\ell}$ は古典論では

$$\vec{\ell} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{C.49}$$

によって定義される。量子論では運動量は微分演算子

$$\mathbf{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \tag{C.50}$$

によって表される。従って、量子論における角運動量の演算子を $\mathbf{L}$ とすると

$$\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{r} \times \vec{\nabla} \tag{C.51a}$$

成分では

$$L_x = -i\hbar\Big(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad L_y = -i\hbar\Big(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\Big), \quad L_z = -i\hbar\Big(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\Big) \tag{C.51b}$$

(座標と微分演算子の順序に注意)。(C.47a,b,c) と (C.51a,b) を比べると、微分演算子 $\hat{\mathbf{M}}$ は量子力学における角運動量の演算子 $\mathbf{L}$ に比例していることがわかる。ここで、比例定数のうち

$$\begin{cases} \hbar & : \ \text{次元を角運動量のものにするため} \ (\hat{\mathbf{M}}\ \text{は無次元}) \\ i & : \ \text{角運動量の演算子は物理量なので、エルミート演算子にするため} \\ & \quad\ (\hat{\mathbf{M}}\ \text{は反エルミート演算子}) \end{cases}$$

これらを考慮して

$$\mathbf{L} = i\hbar\hat{\mathbf{M}} \tag{C.52}$$

とおくと、$\mathbf{L}$ は角運動量の次元を持つエルミート演算子となり、確かに、(C.51a,b) に一致する。(C.47) を利用して、あるいは、(C.51a,b) から直接、角運動量に対して次の交換関係が得られる：

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{C.53}$$

問　(C.51a,b) から直接 (C.53) を導いて見よ。

量子力学で用いられる波動関数はスカラー場である。従って、角運動量は座標系を回転させたとき、波動関数で表される系のみえ方がどのように変わるかということに関係している。例えば、z 軸のまわりの回転では (C.47c) と (C.53) から

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{i\hbar}L_z\phi(\mathbf{r})$$

となり、$\phi(\mathbf{r})$ が角運動量の z 成分の固有値が 0 である状態ならば z 軸の回りに回転した座標系から見ても (逆に系を z 軸の回りに回転しても) その状態が変わらない。また、角運動量の大きさが 0 である状態は特別な方向をもたない、すなわち、球対称である。

以上のような、角運動量と無限小回転の関係は、物理量と無限小変換の関係の一例である。

C.6.3　同時固有関数

(I) L_x, L_y, L_z の同時固有状態

生成子 $\hat{\mathbf{M}}$ あるいは角運動量 $\mathbf{L}$ のどちらを考えても本質的には同じであるが、応用を考

えて角運動量を扱う。

いま、$\phi(\mathbf{r})$ が L_x, L_y, L_z の固有関数 (同時固有関数) で、固有値がそれぞれ $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ とする。すなわち

$$L_x\phi = \lambda_x\phi, \quad L_y\phi = \lambda_y\phi, \quad L_z\phi = \lambda_z\phi$$

とする。角運動量の成分の間の交換関係は (C.53) で与えられる。(C.53) の第１式を ϕ に作用させると

$$\text{左辺} = L_xL_y\phi - L_yL_x\phi = L_x\lambda_y\phi - L_y\lambda_x\phi \quad = \lambda_y\lambda_x\phi - \lambda_x\lambda_y\phi = 0$$

となり、また

$$\text{右辺} = i\hbar L_z\phi = i\hbar\lambda_z\phi$$

となる。これより、

$$\lambda_z = 0 \quad \text{同様にして} \quad \lambda_x = \lambda_y = 0$$

従って、

『$\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ ならば、L_x, L_y, L_z の（のうちのどれでも２つの）同時固有関数はない。』

これに対して

$$[\mathbf{L}^2, L_x] = [\mathbf{L}^2, L_y] = [\mathbf{L}^2, L_z] = 0 \tag{C.54}$$

だから

『$\mathbf{L}^2$ と、例えば、L_z の同時固有関数はありえる。』

◇ (II) 固有関数の間の関係：昇降演算子

固有関数を求めるとき、一般の固有関数を直接求める代わりに、特別な (求めやすい) 固有関数と、固有関数の間の関係を用いると、簡単になる場合がある。このことを、L_z の固有関数を例にして見てみる。

L_z の固有値が $m\hbar$ である固有関数を ϕ_m とする。いま

$$L_\pm \equiv (L_x \pm iL_y)/\sqrt{2} \tag{C.55}$$

とおくと

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm, \quad [L_+, L_-] = \hbar L_z \tag{C.56}$$

この第１式を ϕ_m に作用させると

$$\text{左辺} = [L_z, L_\pm]\phi_m = L_z(L_\pm\phi_m) - \hbar m(L_\pm\phi_m)$$

また

$$\text{右辺} = \pm\hbar L_\pm\phi_m$$

従って

$$L_z(L_\pm\phi_m) = \hbar(m \pm 1)(L_\pm\phi_m) \tag{C.57}$$

すなわち、

『固有値が $m\hbar$ の固有関数に $L_\pm$ を作用させると固有値が $(m\pm1)\hbar$ の固有関数になる。』

よって、$m=0$ である固有関数 (ϕ_0 とする) が知られれば、$L_\pm$ を作用させることによって L_z の固有値が $\hbar$ だけ大きい (小さい) 固有値に対する固有関数が得られる。このことから、$L_\pm$ を**昇降演算子**という。
このとき、固有値の値には制限がないのであろうか？

◇ (III) 固有値の範囲

次に、$\mathbf{L}^2$ の固有関数を考える。
ϕ_m が L_z と $\mathbf{L}^2$ の同時固有関数で $\mathbf{L}^2$ の固有値を $\Lambda\hbar^2$ とする：

$$\mathbf{L}^2\phi_m = \Lambda\hbar^2\phi_m \tag{C.58}$$

(ϕ_m が同時固有関数であることを表すために、以後は $\phi_{\Lambda m}$ と記す。)

$$[\mathbf{L}^2, L_\pm] = 0 \tag{C.59}$$

だから

$$\mathbf{L}^2(L_\pm\phi_{\Lambda m}) = \Lambda\hbar^2(L_\pm\phi_{\Lambda m})$$

となる。すなわち、

『$L_\pm$ **を作用させても** $\mathbf{L}^2$ **の固有値は変わらない。**』

いま、$\phi_{\Lambda m}$ は規格化されているとする：

$$\int \phi^*_{\Lambda m}\phi_{\Lambda m}\, d^3\mathbf{r} = 1 \tag{C.60}$$

このとき

$$\mathbf{L}^2\phi_{\Lambda m} = (L_x^2 + L_y^2)\phi_{\Lambda m} + m^2\hbar^2\phi_{\Lambda m}$$

$\phi^*_{\Lambda m}$ をかけて積分し、(C.60) を用いると

$$\Lambda\hbar^2 = m^2\hbar^2 + \int \phi^*_{\Lambda m}(L_x^2 + L_y^2)\phi_{\Lambda m}\, d^3\mathbf{r}$$

ここで、L_x, L_y がエルミート演算子であることを用いると

$$\text{右辺第 2 項} = \int (L_x\phi_{\Lambda m})^*(L_x\phi_{\Lambda m})\, d^3\mathbf{r} + \int (L_y\phi_{\Lambda m})^*(L_y\phi_{\Lambda m})\, d^3\mathbf{r} > 0$$

よって

$$\Lambda > m^2 \tag{C.61}$$

従って、

「Λ (角運動量の大きさ) が与えられると m (角運動量の z 成分) には最大値および最小値がある。」

この最大値、最小値を求めるには

『最大値 (あるいは最小値) をもつ固有状態に L_+(あるいは L_-) を作用させると 0 になる。』

ことを用いる。一般に

$$\int (L_\pm \phi_{\Lambda m})^* (L_\pm \phi_{\Lambda m})\, d^3\mathbf{r} = \int \phi^*_{\Lambda m} L^\dagger_\pm L_\pm \phi_{\Lambda m}\, d^3\mathbf{r} \tag{C.62}$$

ここで

$$L^\dagger_\pm = (L_x \mp i L_y)/\sqrt{2} = L_\mp \quad (L^\dagger_x = L_x, L^\dagger_y = L_y)$$

および

$$\begin{cases} L_+ L_- = \dfrac{1}{2}(\mathbf{L}^2 - L_z^2 + \hbar L_z) \\ L_- L_+ = \dfrac{1}{2}(\mathbf{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z) \end{cases} \tag{C.63}$$

を用いると、上の積分は

$$\begin{aligned} &\int \phi^*_{\Lambda m} L^\dagger_\pm L_\pm \phi_{\Lambda m}\, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int \phi^*_{\Lambda m} (\mathbf{L}^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z) \phi_{\Lambda m}\, d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2}\hbar^2 (\Lambda - m^2 \mp m) \int \phi^*_{\Lambda m} \phi_{\Lambda m} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2}\hbar^2 [\Lambda - m(m \pm 1)] \end{aligned} \tag{C.64}$$

となる。従って、L_z の最大値を ℓ、最小値 ℓ' をとすると

$$\Lambda = \ell(\ell+1) = \ell'(\ell'-1) \quad \Rightarrow \ \ell' = -\ell \tag{C.65}$$

このことは通常次のように表現される

『$\mathbf{L}^2$ の固有値を $\ell(\ell+1)\hbar^2$ とすると L_z の固有値 $m\hbar$ は $-\ell \le m \le \ell$ の $(2\ell+1)$ 個の値をとる。』

(以後は $\phi_{\Lambda m}$ を $\phi_{\ell m}$ と記す。)
よって、$\phi_{\ell m}$ がすべての m に対して規格化されているとすると

$$L_\pm \phi_{\ell m} = \hbar \sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)/2}\, \phi_{\ell, m\pm 1} \tag{C.66}$$

◇ (IV) 固有関数

　以上で、固有関数の間の関係および固有値が分かった。これから、具体的な固有関数を求める。
これを極座標を用いて行う。直交座標 (x, y, z) と極座標 (r, θ, φ) の関係は

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{C.67}$$

極座標では $L_z,\ L_\pm,\ \mathbf{L}^2$ はそれぞれ次のようになる：

$$\begin{cases} L_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ L_\pm = -\hbar\exp(\pm i\varphi)\Big(\dfrac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\Big)/\sqrt{2} \\ \mathbf{L}^2 = -\hbar^2\Big[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big] \end{cases} \tag{C.68}$$

問　(C.68) を示せ。

(i) まず、L_z の固有関数を求める

$$\phi(\mathbf{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{C.69}$$

と変数分離し、L_z の固有値を $m\hbar$ とすると

$$L_z\phi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\phi = -i\hbar R(r)\Theta(\theta)\frac{d\Phi}{d\varphi} = m\hbar\phi = m\hbar R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

だから

$$-i\frac{d\Phi}{d\varphi} = m\Phi \quad \text{よって} \quad \Phi = \exp(im\varphi) \tag{C.70}$$

(ii) 次に、$L_z, \mathbf{L}^2$ の同時固有関数を求める

$$\mathbf{L}^2\phi = -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\Big)R(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}R(r)\Theta(\theta)\Big] = \ell(\ell+1)\hbar^2\phi \tag{C.71}$$

$\hbar^2\phi$ でわり、$d^2\Phi/d\varphi^2 = -m^2\Phi$ を用いると

$$-\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\Big)\Big]/\Theta(\theta) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = \ell(\ell+1) \tag{C.72}$$

$$\xi \equiv \cos\theta \quad \text{とおくと} \quad -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\xi} \tag{C.73}$$

$$\therefore\ \frac{d}{d\xi}\Big[(1-\xi^2)\frac{d\Theta}{d\xi}\Big] + \Big[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\Big]\Theta = 0 \tag{C.74}$$

これは Legendre の陪微分方程式といわれ (Strum-Liouville 型の微分方程式)、その $\xi = \pm 1$ で有限な解は Legendre の陪関数といわれ P_ℓ^m と記される。

$m = 0$ のときの解

一般の m に対する解は直接求める代わりに、まず、$m = 0$ のときの解を求める。このとき、方程式は次のようになる：

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + \ell(\ell+1)\Theta = 0 \tag{C.75}$$

これはLegendreの微分方程式であり、解はℓ次のLegendreの多項式 $P_\ell(\xi)$ である。Legendreの多項式を用いると Legendre の陪関数は

$$P_\ell^m(\xi) = (1-\xi^2)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}P_\ell}{d\xi^{|m|}} \tag{C.76}$$

と表される。

問　(C.76) で与えられる $P_\ell^m(\xi)$ が (C.74) の解であることを示せ。

なお

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) \equiv P_\ell^m(\cos\theta)\exp(im\varphi) \tag{C.77}$$

は球面 (調和) 関数といわれる。次式が成り立つ：

$$\mathbf{L}^2 Y_\ell^m = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_\ell^m, \quad L_z Y_\ell^m = m\hbar Y_\ell^m \tag{C.78}$$

すなわち

『$\mathbf{L}^2, L_z$ の同時固有関数は $R(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ で与えられる。ℓ は正整数、$-\ell \le m \le \ell$ である。』

問　(C.78) を示せ。

(*)　これまでのところでは $R(r)$ は任意である。$R(r)$ を決めるには別の条件が必要である。例えば、量子力学では、$\phi(\mathbf{r})$ が波動関数とすると、さらに Schrödinger 方程式を満たすという条件から $R(r)$ に対する方程式が得られる。
例えば、ポテンシャルが $U(r)$ で与えられる中心力場の中を運動する質量 m の粒子については、エネルギーが E の固有状態に対する Schrödinger 方程式は

$$H\phi(\mathbf{r}) = \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r)\Big]\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}) \tag{C.79}$$

で与えられる。$\phi(\mathbf{r})$ が $\mathbf{L}^2$ と L_z の同時固有関数であることを考慮して

$$\phi(\mathbf{r}) = R(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

と変数分離し、

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \hbar^{-2}\frac{1}{r^2}\mathbf{L}^2 \tag{C.80}$$

を用いると

$$H\phi = \Big[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{dR}{dr}\Big)\Big]Y_\ell^m + \frac{1}{2mr^2}R(r)\mathbf{L}^2Y_\ell^m + U(r)R(r)Y_\ell^m = ER(r)Y_\ell^m$$

(C.78) を用い、さらに Y_ℓ^m でわると

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{d}{dr}\Big) + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2} + U(r)\Big]R = ER \tag{C.81}$$

となる。これが $R(r)$ に対する方程式である。

C.6.4　回転群の表現

(I) $\mathbf{L}^2$ の固有関数全体の集合

$\mathbf{L}^2$ の固有値が $\ell(\ell+1)\hbar^2$ の固有関数を考える：$\phi_\ell(\mathbf{r})$ とする。

ℓ が与えられると、L_z の固有値 m は $2\ell+1$ 個あり、それらに対応して固有関数 $\phi_{\ell m}$ も $2\ell+1$ 個ある。これらの固有関数は $\mathbf{L}^2$ と L_z の同時固有関数である:

$$\mathbf{L}^2\phi_{\ell m}(\mathbf{r}) = \ell(\ell+1)\hbar^2\phi_{\ell m}(\mathbf{r}), \qquad L_z\phi_{\ell m}(\mathbf{r}) = m\hbar\phi_{\ell m}(\mathbf{r}) \tag{C.82}$$

$\phi_\ell(\mathbf{r})$ は、これらの $2\ell+1$ 個の同時固有関数の一次結合で表される：

$$\phi_\ell(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_m\phi_{\ell m}(\mathbf{r}) \tag{C.83}$$

ここで、$\phi_{\ell m}(\mathbf{r}) \equiv R(r)Y_\ell^m$ である。$R(r)$ を与えると、$\phi_{\ell m}(\mathbf{r})$ は既知であるから $\phi_\ell(\mathbf{r})$ は $2\ell+1$ 個の一次結合の係数 c_m の組によって表されることになる。
言い換えれば、$\phi_\ell(\mathbf{r})$ は c_m を成分とする $2\ell+1$ 次元ベクトルによって表される：

$$\phi_\ell(\mathbf{r}) \sim \begin{pmatrix} c_\ell \\ c_{\ell-1} \\ c_{\ell-2} \\ \vdots \\ c_{-(\ell-1)} \\ c_{-\ell} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{V}_\ell \tag{C.84}$$

特に、$\phi_\ell(\mathbf{r}) = \phi_{\ell m}(\mathbf{r})$ の場合を考えると

$$\phi_{\ell m}(\mathbf{r}) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;\leftarrow\; (\ell-m+1)\,\text{番目} \quad \Big(\equiv \mathbf{e}_m\Big) \tag{C.85}$$

となる。このとき、(C.83) に対応して

$$\mathbf{V}_\ell = \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_m\mathbf{e}_m \tag{C.86}$$

が成立する。よって、

『$\mathbf{L}^2$ の固有関数全体の集合は対応するベクトル $\mathbf{V}_\ell$ 全体の集合すなわち、$2\ell+1$ 次元
　ベクトル空間に対応させることができる。』

$\phi_{\ell m}(\mathbf{r})$ はこの $2\ell+1$ 次元ベクトル空間の基底ベクトル $\mathbf{e}_m$ に対応する。(このことを、簡単

に、$\phi_{\ell m}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{L}^2$ の固有関数全体の集合の基底ベクトルになっているということがある。)

(II) 角運動量の行列表示

L_z の $\phi_{\ell m}$ に対する作用

$$L_z\phi_{\ell m} = m\hbar\phi_{\ell m}$$

を L_z が $\phi_{\ell m}$ に対応する $2\ell+1$ 次元ベクトル $\mathbf{e}_m$ に作用すると考えると、L_z は次の行列で表される $^{(*)}$：

$$L_z \sim \hbar \begin{pmatrix} \ell & & & \\ & \ell-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\ell \end{pmatrix} \tag{C.87}$$

同様に、(C.66) から $L_\pm$ を行列で表すと、その (m, m') 要素は

$$(L_\pm)_{m'm} \sim \hbar\delta_{m',m\pm1}\sqrt{(\ell+m+\frac{1\pm1}{2})(\ell-m+\frac{1\mp1}{2})/2} \tag{C.88}$$

となる。もちろん、$\mathbf{L}^2$ は行列 $\ell(\ell+1)\hbar^2 I$ で表される。

例えば、$\ell=2$ の場合は、ベクトル空間は5次元で (6–46) から

$$L_z \sim \hbar \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix} \tag{C.89a}$$

となる。また、(C.88) から

$$L_+ \sim \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_- \sim \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{C.89b}$$

となる。また、L_x, L_y に対応する行列は

$$L_x \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y \sim \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{C.89c}$$

となる。

(C.89a–c) は角運動量の演算子 $\mathbf{L}$ を5次元ベクトル空間に作用する行列で表したもの、(C.87)、(C.88) は $2\ell+1$ 次元ベクトル空間に作用する行列で表したものといえる。このことは、もちろん、無限小回転の生成子 $\hat{\mathbf{M}}$ や一般の回転 $R(\mathbf{e};\theta)$ に対しても同様にできる。

このように、一般に、無限小回転あるいは有限の回転を n 次元ベクトル空間に作用する $n\times n$ 行列で表したもの (正確には対応させたもの) を (3 次元) 回転群 (あるいはその Lie 代数) の n **次元表現** † という。このときの行列を**表現行列**という。

問　3 次元表現 ($\ell=1$ の場合) に対する角運動量の表現行列を求めよ。

† より正確には、1 つの回転には 1 つの表現行列が対応し (準同型対応)、かつ、回転の積には表現行列の積が対応する。

表現行列は座標系を回転すると、考えている系のみえ方がどのように変わるかを表している。この行列の型および行列の作用するベクトル空間が角運動量の大きさで異なるということは、角運動量を用いて系の状態を分類すると都合がよい場合があるということを示している。

◇スカラー場の集合

2 つのスカラー場 ϕ_1, ϕ_2 の 1 次結合を

$$(a\phi_1+b\phi_2)(\mathbf{r}) \equiv a\phi_1(\mathbf{r})+b\phi_2(\mathbf{r})$$

とすると、スカラー場全体の集合は (無限次元の) ベクトル空間になる。微分演算子で表した無限小回転の生成子 $\hat{\mathbf{M}}$ は実は回転群の Lie 代数のこのベクトル空間上の表現である。

(*) 行列の形式的な計算法

$\phi_{\ell m}(\mathbf{r})$ は規格化されているとする：

$$\int \phi_{\ell m}(\mathbf{r})^* \phi_{\ell' m'}(\mathbf{r})\, d^3x = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{C.90}$$

この左辺を 2 つの関数 $\phi_{\ell m}(\mathbf{r})$ と $\phi_{\ell' m'}(\mathbf{r})$ のスカラー積という。一般の 2 つの関数 $\phi_1(\mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{r})$ についても同様で、次のように記す：

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv \int \phi_1(\mathbf{r})^* \phi_2(\mathbf{r})\, d^3x \tag{C.91}$$

(C.82) の第 2 式で $m\to m'$ としたものに $\phi^*_{\ell m}$ をかけて積分すると

$$\text{左辺} = \int \phi_{\ell m}(\mathbf{r}) L_z \phi_{\ell m'}(\mathbf{r})\, d^3x = (\phi_{\ell m}, L_z\phi_{\ell m'})$$

$$\text{右辺} = \textstyle\int \phi_{\ell m}(\mathbf{r})^* m'\hbar \phi_{\ell m'}(\mathbf{r}) = m\hbar \int \phi_{\ell m}(\mathbf{r})^{(}*)\phi_{\ell m'}(\mathbf{r})\, d^3x = m'\hbar\delta_{mm'}$$

この左辺が L_z に対応する行列の mm' 成分、$(L_z)_{mm'}$、を与える。右辺がその値であり、(C.87) と一致する。同様にして、$L_\pm$ の成分は (C.66) を用いて次のようにして計算される：

$$\begin{aligned}(L_\pm)_{mm'} &= \int \phi_{\ell m}(\mathbf{r})^* L_\pm \phi_{\ell m'}(\mathbf{r})\, d^3x = \int \phi_{\ell m}(\mathbf{r})^* \hbar\sqrt{(\ell\mp m')(\ell\pm m'+1)/2}\,\phi_{\ell, m'\pm1}(\mathbf{r})\, d^3x \\ &= \hbar\sqrt{(\ell\mp m')(\ell\pm m'+1)/2}\int \phi_{\ell m}(\mathbf{r})^*\,\phi_{\ell,m'\pm1}(\mathbf{r})\, d^3x \\ &= \hbar\sqrt{(\ell\mp m')(\ell\pm m'+1)/2}\;\delta_{m\,m'\pm1}\end{aligned}$$

また、$\mathbf{L}^2$ の mm' 成分は (C.82) の第 1 式を用いて

$$(\mathbf{L}^2)_{mm'} = \int \phi_{\ell m}(\mathbf{r})^* \mathbf{L}^2 \phi_{\ell m'}(\mathbf{r})\, d^3x = \ell(\ell+1)\hbar^2 \int \phi_{\ell m}(\mathbf{r})^* \phi_{\ell m'}(\mathbf{r})\, d^3x = \ell(\ell+1)\hbar^2 \delta_{mm'}$$