『物理と数学』講義資料 No.3 【フーリエ級数】

1 周期関数とフーリエ級数

適当な境界条件を科すことにより波動方程式の解は、離散的な固有モードと固有値による関数系で表されることがわかった。このような関数系の一般的な性質を考えよう。

境界条件により、関数系や固有値の値は異なるが、適当な長さを周期とする周期関数であることがわかる。これは、境界の外側まで関数を周期的に拡張して考えて見るとわかる。

そこで、ここでは周期 L の周期関数 $f(x)$ を考える。すなわち、

$$f(x+L)=f(x) \tag{1}$$

が成り立つ。ところで、典型的な周期関数は三角関数である。周期を L とする三角関数は $\cos(2\pi x/L)$ と $\sin(2\pi x/L)$ である。また、L/n 周期の関数は必ず周期 L の関数になるので、一般には

$$f_N(x)=\frac{p_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}p_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+\sum_{n=1}^{N}q_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \tag{2}$$

と書ける。この $f_N(x)$ で $f(x)$ を近似する方法を考える。そこで、最小 2 乗法を用いる。1 周期における 2 乗残差

$$\epsilon^2=\frac{1}{L}\int_0^L[f(x)-f_N(x)]^2\mathrm{d}x \tag{3}$$

を最小にするように係数を決める。ここでは、

$$\int_0^L\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\mathrm{d}x=\frac{L}{2}\delta_{nm} \tag{4}$$

$$\int_0^L\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\mathrm{d}x=\frac{L}{2}\delta_{nm} \tag{5}$$

$$(n\neq 0)$$

$$\int_0^L\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\mathrm{d}x=0 \tag{6}$$

関係を利用して、残差を計算すると

$$\epsilon^2=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)^2\mathrm{d}x-p_0a_0/2+{p_0}^2/4-\sum_{n=1}^{N}(p_na_n+q_nb_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}({p_n}^2+{q_n}^2) \tag{7}$$

と表せる。ここで、

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\mathrm{d}x \tag{9}$$

である。そして、ϵ^2 を最小にするためには

$$\frac{\partial\epsilon^2}{\partial p_n}=0\quad\to\quad p_n=a_n \tag{10}$$

$$\frac{\partial\epsilon^2}{\partial q_n}=0\quad\to\quad q_n=b_n \tag{11}$$

が条件となる。このとき

$$\epsilon^2=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)^2\mathrm{d}x-\left[\frac{{a_0}^2}{4}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}({a_n}^2+{b_n}^2)\right] \tag{12}$$

となる。もし、$N\to\infty$ の時、$\epsilon^2\to 0$ ならばこの級数展開は、平均収束するという。ところで、$N\to\infty$ でも $\epsilon^2\geq 0$ なので、

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)^2\mathrm{d}x\geq\frac{{a_0}^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}({a_n}^2+{b_n}^2) \tag{13}$$

が成り立ち、ベッセルの不等式と呼ばれている。また、平均収束する場合には等号が成り立ち、パーセバルの関係式という。

この三角関数による級数は $f(x)$ が区分的に滑らかな関数ならば、その関数が連続な点では一様に収束することが知られていて、フーリエ級数と呼ばれ、a_n、b_n はフーリエ係数という。また、平均収束することも証明されている。

フーリエ級数は複素関数を使っても表現できる。すなわち、

$$c_{\pm n}=\frac{a_n\mp\mathrm{i}b_n}{2} \tag{14}$$

とする。そのとき、

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(\mathrm{i}2\pi nx/L) \tag{15}$$

$$c_n=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi nx/L)\mathrm{d}x \tag{16}$$

である[1]。パーセバルの関係式は

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{17}$$

と表される。

例として、矩形波を考えてみよう

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < L/2 \\ -1 & L/2 < x < L \end{cases} \tag{18}$$

は矩形波を表す。このような不連続な関数でも不連続な点が有限個ならばフーリエ級数は収束する。この場合は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L}\int_0^{L/2} \exp(-\mathrm{i}2\pi nx/L)\mathrm{d}x \\ &-\frac{1}{L}\int_{L/2}^{L} \exp(-\mathrm{i}2\pi nx/L)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{\mathrm{i}n} \end{aligned} \tag{19}$$

で表される。具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{4}{\pi}\biggl(&\sin kx + \frac{1}{3}\sin 3kx + \frac{1}{5}\sin 5kx \\ &+\frac{1}{7}\sin 7kx ...\biggr)\ (k = 2\pi/L) \end{aligned} \tag{20}$$

である。この級数が収束する様子をグラフにしたものが図 1である。これを見ると不連続な点 ($x = 0,\ L/2, ...$) では値が左極限と右極限の平均になっている。これはギブスの現象と呼ばれてるもので、フーリエ級数によって計算される値を $\tilde{f}(x)$ とすると

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \tag{21}$$

が一般的に成り立つ。

2 特殊な境界条件に対する解法

弦の振動を考えた場合に、両端を固定した条件では、変数分離した方程式の解は容易に求められた。しかし、ここでは片側をある変位で振動させるような条件を考えてみよう。すなわち、

$$\xi(t, 0) = 0,\ \ \xi(t, L) = a(t) \tag{22}$$

[1] c_n は複素フーリエ係数と呼ばれる

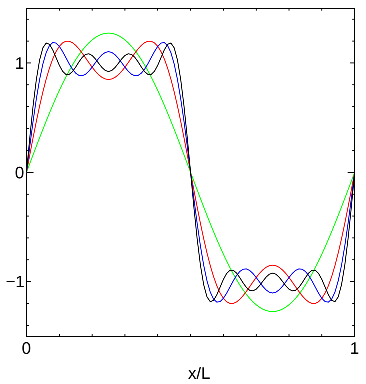

図 1: 矩形波に対するフーリエ級数の収束の様子。それぞれの曲線は、展開の各項を 1 つずづ増やしたもの

を満たす解を探すのである。このような条件では変数分離をしてもうまく解を見つけることはできない。そこで、まず、解の形を

$$\xi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin k_n x \ \ (k_n = n\pi/L) \tag{23}$$

と仮定し、

$$u_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L \xi(t, x)\sin k_n x \mathrm{d}x \tag{24}$$

を用いる。そして、波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \tag{25}$$

に $\sin k_n x$ をかけて、積分を行うと

$$\frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\sin k_n x \mathrm{d}x = \ddot{u_n}(t) \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^L \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\sin k_n x \mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\sin k_n x\bigg|_0^L - k_n\int_0^L \frac{\partial \xi}{\partial x}\cos k_n x \mathrm{d}x \\ &= -k_n\ \xi\cos k_n x|_0^L - {k_n}^2\int_0^L \xi\sin k_n x \mathrm{d}x \\ &= -k_n(-1)^n a(t) - {k_n}^2\frac{L}{2}u_n(t) \end{aligned} \tag{27}$$

が得られるので、$u_n(t)$ の満たすべき方程式は

$$\frac{1}{v^2}\ddot{u_n}(t) + {k_n}^2 u_n(t) = -\frac{2(-1)^n k_n}{L}a(t) \tag{28}$$

という強制振動の方程式に帰着される。例えば、$a(t) = A\cos\omega t$ のような単振動を考えよう。また、$\omega_n = vk_n$ とすると、

$$\ddot{u_n}(t) + {\omega_n}^2 u_n(t) = -\frac{2(-1)^n v^2 k_n}{L} A\cos\omega t \quad (29)$$

である。この方程式の一般解は

$$u_n(t) = \alpha_n \cos\omega_n t + \beta_n \sin\omega_n t - \frac{2(-1)^n v^2 k_n}{L(-\omega^2 + {\omega_n}^2)} A\cos\omega t \quad (30)$$

で与えられる。この最初の 2 つの項は弦の自由振動を与えるもので、最後の項が、端を振ったことによって励起される振動である。これを見れば、$\omega \sim \omega_n$ のとき、非常に大きな振動が励起されることがわかり、固有モードと外力の共鳴現象を表している。

ところで、式 (23) の形を仮定する限り、$\xi(t, L) = 0$ となってしまう。これは、フーリエ級数で展開する関数が $x = L$ で不連続になっているためで、

$$\lim_{\epsilon\to+0} \xi(t, L-\epsilon) = a(t) \quad (31)$$

を満たす解を探していることになる。例えば、$a(t) = a$ と一定の時を考える。この場合には、解は

$$u_n(t) = \alpha_n \cos\omega_n t + \beta_n \sin\omega_n t - \frac{2(-1)^n}{Lk_n} a \quad (32)$$

となるが、最初の 2 つは自由振動の項なので $a = 0$ の時と同じ振る舞いである。そこで、最後の項だけを考え、級数和を計算する。

$$a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{Lk_n} \sin k_n x = a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin k_n x = -\frac{ax}{L} \quad (33)$$

となる。最後の計算には

$$\frac{2}{L}\int_0^L x\sin k_n x \mathrm{d}x = -L\frac{2(-1)^n}{\pi n} \quad (34)$$

という関係を用いた。

したがって、波動方程式の解は

$$\xi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos\omega_n t + \beta_n \sin\omega_n t) \sin k_n x + ax/L \quad (35)$$

で与えられる。これは確かに、境界条件を満たす解になっている。しかし、級数解と上記の解は $x > L$ での値は異なることに注意する。級数の収束の様子を図 2に示す。これを見ると

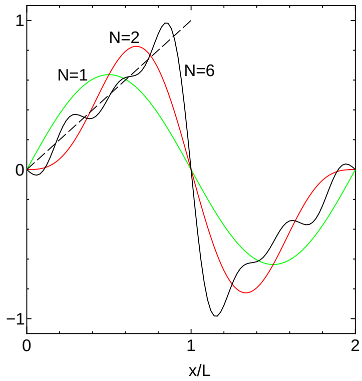

図 2: $f(x) = x/L$ を級数展開したもの

$$\xi(t, L) = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to+0} [\xi(t, L-\epsilon) + \xi(t, L+\epsilon)] = 0 \quad (36)$$

とギッブスの現象が再現されている。

3 ヒルベルト空間と直交関数系

ある種の関数の集合は、ベクトル空間として扱うことができる。そこで、N 次元のベクトル空間の要素 $\mathbf{u}$ を考えてみる。これらは、正規直交基底ベクトル $\mathbf{e}_n$ を用いて、

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{N} u_n \mathbf{e}_n \quad (37)$$

と書ける。また、別のベクトルとの内積は

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{N} {v_n}^* u_n \quad (38)$$

となる。ここで、$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = \delta_{nm}$ という関係をつかった。また、${v_n}^*$ は v_n の複素共役である。

さて、$N \to \infty$ の場合を考える。このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \quad (39)$$

を満たす数列 $\{u_n\}$ の集合 X を考え、その要素を $\mathbf{u} = \{u_n\}$ と書くことにする。この集合は、ベクトル空間の条件を満たす。そして、

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} {v_n}^* u_n \quad (40)$$

で内積を定義し、要素の大きさ（ノルムという）は

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \tag{41}$$

で定義する。また、ある要素列 $\{\mathbf{x}_n\}$ 極限に関して

$$||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|| \to 0 \quad (n, m \to \infty) \tag{42}$$

が成り立つ時、

$$||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}|| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{43}$$

を満たす $\mathbf{x}$ が X の要素として必ず存在する時、X はヒルベルト空間と呼ばれている。

ここで、フーリエ級数による展開を考えてみる。ある関数は $0 < x < L$ で定義され、2 乗可積分、すなわち

$$\int_0^L |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty \tag{44}$$

で、フーリエ級数を使って

$$f(x) = \sum_n c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx/L}/\sqrt{L} \tag{45}$$

と展開されている[2]。このとき、$f(x)$ は 2 乗可積分なので、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \tag{46}$$

が成り立つ。別の関数 $g(x)$ に関しても同様な展開

$$g(x) = \sum_n d_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx/L}/\sqrt{L} \tag{47}$$

が成り立つ時、

$$(g, f) \equiv \int_0^L g^*(x) f(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n{}^* c_n \tag{48}$$

によって内積を定義できる。すると、フーリエ級数展開は

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx/L} \tag{49}$$

を正規直交基底として関数を表したことと同等である。このように 2 乗可積分な関数の集合は、ヒルベルト空間となることが知られている[3]。

しかし、基底とすべき関数系が不適当ならば、すべての関数を基底関数の重ね合わせで表現できるかどうかはわからない。ある正規直交関数列 $\{u_n\}$ を考え[4]、

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n u_n \tag{50}$$

という級数を作って、$f(x)$ を最小 2 乗近似すれば、フーリエ級数の計算と同様に $a_n = (u_n, f)$ という関係が得られる。この状態で $N \to \infty$ とすれば

$$(f, f) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \tag{51}$$

の関係、すなわちベッセルの不等式が成り立つ。また、等号、すなわちパーセバルの関係が成り立つ場合、$\{u_n\}$ は完全系をなすという。

フーリエ級数以外にも多くの正規完全直交関数系による級数展開が知られている。例えば、$-1 \leq x \leq 1$で定義された関数に対して、

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n \tag{52}$$

で定義されるルジャンドルの多項式は[5]、

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \tag{53}$$

という直交関係をもち、完全系をなすことが示されている。これを用いると、

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n \quad (|x| \leq 1,\, |y| < 1) \tag{54}$$

が成り立つ（母関数展開）。また、

$$(1 - x^2) \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 2x \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + n(n+1)u = 0 \tag{55}$$

という方程式（ルジャンドルの方程式）の一つの解である[6]。

参考文献

1. 今村勤：「物理とフーリエ変換」、物理と数学シリーズ、（岩波書店、1976 年）.

2. 高橋健人：「物理数学」、新数学シリーズ、（培風館、1958 年）.

[2] $1/\sqrt{L}$ という係数は後の関係を考慮して取り入れた。

[3] 数学的に厳密な表現ではない。L_2 空間と呼ばれるものである。

[4] $(u_m、u_n) = \delta_{mn}$ が成り立つ。

[5] $P_n(x)$ が n 次の多項式であることは明らかである。

[6] $x = \pm 1$ は方程式の特異点である。しかし、n が 0 以上の整数の時、$x = \pm 1$ でも正則な解が存在し、P_n である。もう一つの独立解は、非正則である。