*Remark* . 積分の基本不等式、

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-int}dt\right| \leq \int_a^b \left|f(t)e^{-int}\right| dt$$

そのものは、この場合、役に立たない。

上の結果は次のような直感的な意味付けが可能である。まず、オイラーの公式より、主張は

$$\lim_{n\to\infty} \oint f(t)\cos(nt)\,dt = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \oint f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

と同じ内容である。この積分に対する解釈としては、高周波関数 $\cos(nt)$ または $\sin(nt)$ で $f$ を振幅変調 (amplitude modulation) して、それを $f$ の周期にわたって積分するというもので、もし、関数 $f$ の変化の仕方が $\cos(nt)$, $\sin(nt)$ の周期 $2\pi/n$ に比べてゆっくりであれば、プラス成分とマイナス成分の積分値が打ち消し合って、全体の積分値は 0 に近づく。

# 3　フーリエ級数

周期 $2\pi$ の周期関数 $f(x)$ で

$$\oint |f(x)|^2 dx < +\infty$$

となるものを

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}, \quad f_n \in \mathbb{C}$$

という形の級数 (**Fourier series**) で表示する問題（関数の**フーリエ展開**）について考える。

形式的に計算すると、

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\oint_{2\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

となる。このように、複素数 $f_n$ は関数 $f$ で一意的に定まり、$f$ の**フーリエ係数** (Fourier coefficient) と呼ばれる。さらにこのフーリエ級数は、正規直交系 $\{e_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$ を使って、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (e_n|f)e_n(x)$$

と表すことができる。

ここで、フーリエの仕事の歴史的意義について一言。先行する、D. Bernoulli (1700–1782), L. Euler (1707–1783) の仕事との関係。J. Fourier (1768–1830) は、連続ではない周期関数を三角関数展開してみせ、「全ての (周期) 関数」がこのような表示をもつと主張し、その考えに基づいて、熱伝導方程式の解の研究を行ったようである。Fourier の「主張」は、その後、P. Dirichlet (1805–1859) 等によって厳密な証明が与えられた。

**例題 3.1.** ステップ関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x < \pi, \\ 0 & \text{if } -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

のフーリエ係数は、

$$f_0 = \frac{1}{2}, \quad f_n = \frac{1-(-1)^n}{2\pi i n}$$

であるから、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

は絶対収束しない。（絶対収束の意味がわかるかな。）

*Remark .* フーリエ級数が絶対収束すれば、得られる関数は、連続関数である。（逆は成り立たない。）

**問 7.** 関数 $f$ が実数を値に取るとき、フーリエ係数がみたすべき条件を求め、フーリエ展開を三角関数系により書き直せ。

# 4　近似定理

フーリエ展開の妥当性について調べよう。まず、絶対（値）収束するとは限らないので、その正則化 (regularization) を考える。これには、Fejer の方法を始めとしていくつかの方法があるが、ここでは Poisson の方法について説明しよう。

高周波平均の公式（あるいはベッセルの不等式）により、

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$$

が成り立つので、$0 < r < 1$ に対して、

$$\sum_n f_n r^{|n|} e^{inx}$$

は絶対収束し、$r \to 1$ のとき、フーリエ級数に近づくと考えられる。この級数に、$f_n$ を $f$ の積分で表したものを代入すると、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) P_r(x-y)\, dy$$

という表式を得る。ここで、Poisson 核 $P_r(y)$ は、

$$\begin{aligned} P_r(y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{iny} = \sum_{n=0}^{\infty} (re^{iy})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (re^{-iy})^n \\ &= \frac{1}{1-re^{iy}} + \frac{re^{-iy}}{1-re^{-iy}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos y + r^2} \end{aligned}$$

なる周期 $2\pi$ の周期関数である。

**命題 4.1 (Poisson 核の性質).**

(i) $P_r(y) \geq 0$ (実は、$P_r(y) \geq \frac{1-r}{1+r}$) であり $y$ の連続関数 (実は $y$ の解析関数)。

(ii)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) dy = 1,$$

(iii)

$$\lim_{r\to 1-0} P_r(y) = 0$$

for $y \neq 0$. More precisely, $\forall\delta > 0$, $\forall\epsilon > 0$, $\exists r' < 1$, $P_r(y) \leq \epsilon$ for $|y| \geq \delta$ and $r' \leq r < 1$.

**問 8.** $P_r(y)$ の概形を描け。

二倍角の公式を使って、Poisson 核の表式を書きなおせば、

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{x}{2}}$$

が得られる。この形から、$P_r$ の概形がわかる。

**定理 4.2.** 周期 $2\pi$ の連続関数 $f(x)$ に対して、そのフーリエ係数を $\{c_n\}$ とすれば、

$$f(x) = \lim_{r\to 1-0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

が成り立つ。より正確には、この収束は $x$ に関して一様である。

*Proof.* 与えられた $\epsilon > 0$ に対して、

$$|f(x) - f(y)| \le \epsilon \qquad \text{for } |x-y| \le \delta$$

が成り立つように $\delta > 0$ を十分小さく取って、さらに

$$P_r(x-y) \le \epsilon \qquad \text{if } |x-y| \ge \delta$$

であるように $r < 1$ を十分 1 に近く取っておけば、

$$\begin{aligned}
&\left|2\pi f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(y)P_r(x-y)\,dy\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)-f(y))P_r(x-y)\,dy\right| \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy \\
&= \int_{|x-y|\le\delta} |f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy + \int_{|x-y|\ge\delta} |f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy \\
&\le \epsilon\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y)\,dy + \epsilon\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(y)|\,dy \\
&\le 2\pi\epsilon + 4M\pi\epsilon
\end{aligned}$$

となる。$(M = \|f\|_\infty)$ □

**系 4.3 (一様近似定理).** $\forall\epsilon > 0$, $\exists N$, $\{a_n\}_{n=-N}^{N}$

$$\left|f(x) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\right| \le \epsilon$$

for any $x$.

完備性と完全正規直交系。連続関数 $f$ について、

$$\|f - \sum_{n=-N}^{N} (e_n|f)e_n\|^2 \le \|f - \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\|^2 \le 2\pi\|f - \sum a_n e_n\|_\infty^2 \to 0$$

次に、区分的に連続な関数 $f$ に対しては、連続関数 $g$ で $\|f-g\|$ がいくらでも小さいものが取れるので、

$$\begin{aligned}\|f - \sum(e_n|f)e_n\| &\le \|f - g + \sum(e_n|f-g)e_n\| + \|g - \sum(e_n|g)e_n\| \\ &\le \|f-g\| + \|g - \sum(e_n|g)e_n\|\end{aligned}$$

もいくらでも小さく取れる。

実は、

$$\int |f(x)|^2 < +\infty$$

なる関数（二乗可積分関数）に対しても、連続関数による二乗平均近似が可能であることが知られているので、

**定理 4.4.** 周期 $2\pi$ の二乗可積分な周期関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して、

$$(f|g) = \sum(f|e_n)(e_n|g)$$

すなわち、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f_n} g_n, \qquad f_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx.$$

とくに、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2$$

である。

一般に、内積空間 $\mathcal{H}$ の正規直交系 $\{e_n\}$ が、すべてのベクトル $f$ に対して

$$(f|f) = \sum_n |(e_n|f)|^2$$

を満たすとき、正規直交系は完備 (complete) であるという言い方をする。上の最後の関係は、**Parseval** の等式と称され、三角関数系の完備性を表している。完備正規直交系に対しては、

$$f = \sum_n (e_n|f)e_n$$

が

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{k=1}^{n}(e_k|f)e_k \right\| = 0$$

の意味で成り立つので、完備正規直交系のかわりに正規直交基底という言い方もする。またこのとき、内積の連続性 (Cauchy-Scwarz の不等式) から

$$(f|g) = \sum_n (f|e_n)(e_n|g)$$

が一般的に従う。量子力学では、この関係式を

$$I = \sum_n |e_n)(e_n|$$

と簡潔に書き表す。（この記号のためには、内積は第一変数について線型であるように取る必要がある。）

**問 9.** 周期が $L > 0$ のときに、上の定理の公式を書きなおしてみよ。$f(x) = F(Lx/2\pi)$.

多項式で表される関数のフーリエ係数を計算するために、$y \in \mathbb{R}$ をパラメータとした不定積分

$$\int x^k e^{-iyx} dx$$

を求めてみよう。部分積分を使って「循環的」に計算することもできるが、ここでは、

$$\int e^{-iyx} dx = \frac{i}{y} e^{-iyx}$$

を $y$ で次々に偏微分してみると、

$$\int x e^{-iyx} dx = \frac{ix}{y} e^{-iyx} + \frac{1}{y^2} e^{-iyx}$$

$$\int x^2 e^{-iyx} dx = i\frac{x^2}{y} e^{-iyx} + \frac{2x}{y^2} e^{-iyx} - \frac{2i}{y^3} e^{-iyx}$$

などとなる。

これを使って、$x$, $x^2$ $(-\pi < x < \pi)$ のフーリエ係数を計算すると、それぞれ

$$\frac{2\pi i}{n}(-1)^n (n \neq 0), \qquad \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n (n \neq 0)$$