有限区間のフーリエ級数

山本昌志*

2006 年 11 月 14 日

概 要

定義域が $[0, L]$ の関数を余弦フーリエ級数と正弦フーリエ級数で表す方法を説明する．

1　本日の内容

本日の内容は，教科書 [1] の p.227–229 ページである．ここでは，任意の区間 $[0, L]$ で定義された関数をフーリエ級数を使って表すことを学ぶ．さらに，フーリエ級数がある関数の最良近似となっていることを示す．

本日の学習の目標は，つぎのとおりである．

- 任意の区間 $[0, L]$ で定義された関数を，余弦フーリエ級数と正弦フーリエ級数で表すことができる．

2　有限区間で定義された関数のフーリエ級数

2.1　余弦フーリエ級数と正弦フーリエ級数

ここでは，ある区間で定義された関数をフーリエ級数で取り扱うことを考える．これまで取り扱ってきた関数は，定義域 $[-\infty, \infty]$ の周期関数であった．ここでは，定義域 $[0, L]$ の有限な区間の関数を取り扱う．この範囲の外側は興味の対象外となり，その値はどうでもよい．

区間 $[0, L]$ で定義された関 $f(x)$ がある．このとき，$[-L, L]$ で定義された偶関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq L) \\ f(-x) & (-L \leq x \leq 0) \end{cases} \tag{1}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

と定義する．これを周期 $2L$ の周期関数と考えるとフーリエ級数で表すことができる．すなわち，区間 $[0,\, L]$ で $f(x)$ は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos\frac{3\pi x}{L} + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \qquad (2) \\
&\qquad \text{ただし，} \qquad a_n = \frac{1}{2L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

と表すことができる．これを余弦フーリエ級数と言い，$[0,\, L]$ では元の関数 $f(x)$ を正しく表している．区間 $[0,\, L]$ で関数系 $\cos n\pi x/L$ は，完全直交系となっているからである．完全直交系については，付録 1 を見よ．

一方，$[-L,\, L]$ で定義された奇関数 $G(x)$ として

$$
G(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le L) \\ -f(-x) & (-L \le x \le 0) \end{cases} \qquad (3)
$$

を考えることもできる．$G(x)$ は奇関数なので，区間 $[0,\, L]$ で $f(x)$ は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= b_1 \sin\frac{\pi x}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin\frac{3\pi x}{L} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (4) \\
&\qquad \text{ただし，} \qquad b_n = \frac{1}{2L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

と表すこともできる．これを正弦フーリエ級数と言う．

2.2 余弦フーリエ級数と正弦フーリエ級数の具体例

ここでは，余弦フーリエ級数と正弦フーリエ級数の具体例として図 1 のように $[0, \pi]$ で定義された関数を考える．

余弦フーリエ級数　余弦フーリエ級数の係数 b_n は，式 (4) から直ちに計算できる．

$$
a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \,\mathrm{d}x
$$

$n = 0$ の場合は，直ちに

$$
= \pi \qquad (n = 0)
$$

$n \neq 0$ の場合は部分積分を使う

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right]
\end{aligned}
$$

n は整数なので，$\cos n\pi = (-1)^n$ となる．ゆえに，

$$
= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) \tag{5}
$$

以上より，図 1 の余弦フーリエ級数は次のように書くことができる．

$$
f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^3} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \cdots\right] \tag{6}
$$

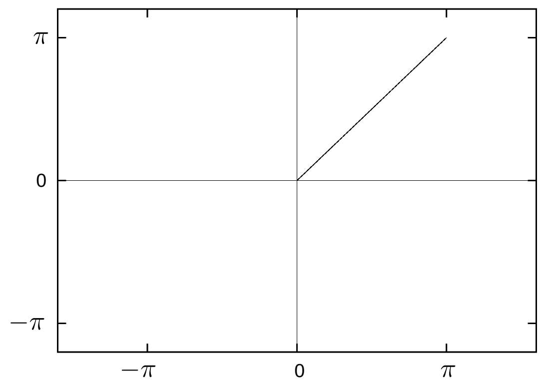

図 1: 区間 $[0, L]$ で定義された関数

正弦フーリエ級数　一方，正弦フーリエ級数は，次のようになる．

$$
b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x
$$

部分積分を使うと

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right) + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}
\end{aligned}
$$

n は整数なので，$\cos n\pi = (-1)^n$ となる．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n}\right) \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

以上より，図 1 の正弦フーリエ級数は次のように書くことができる．

$$
f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots\right] \qquad (8)
$$

余談であるが，$x = \pi/2$ の値を考えると面白い結果が得られる．f(x) での値は $\pi/2$ で，式 (8) を使うと，

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= 2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} + \cdots\right] \\
&= 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

が得られる．これより，ライプニッツの公式

$$
\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \qquad (10)
$$

が得られる．この式は感動的である．元々円周率は円の直径と周長の比と幾何学的にで定義された．それが，このような単純な解析的な式で表せるのである．これで，周長と直径を測定して円周率を求めることから開放された．

2.3　フーリエ級数とテイラー展開

区間 $[0, L]$ で定義された関数は，ここで示した余弦フーリエ級数や正弦フーリエ級数の他に，テイラー展開 (テイラー級数) で表すこともできる．ただし，フーリエ級数は不連続関数も取り扱えるが，テイラー展開の場合連続な関数という制限はある．先ほどの例を，それぞれの級数で展開した場合の比較を図 2 に示す．区間 $[0, \pi]$ では，どれも関数を正確に記述している．しかし，区間を外れるとその振舞は大きく異なる．

どの方法がよいのだろうか?．それは，取り扱う問題に依存する．諸君は，もっとも適切な方法を選択すれば良い．この辺の話は，来週の講義で行う．

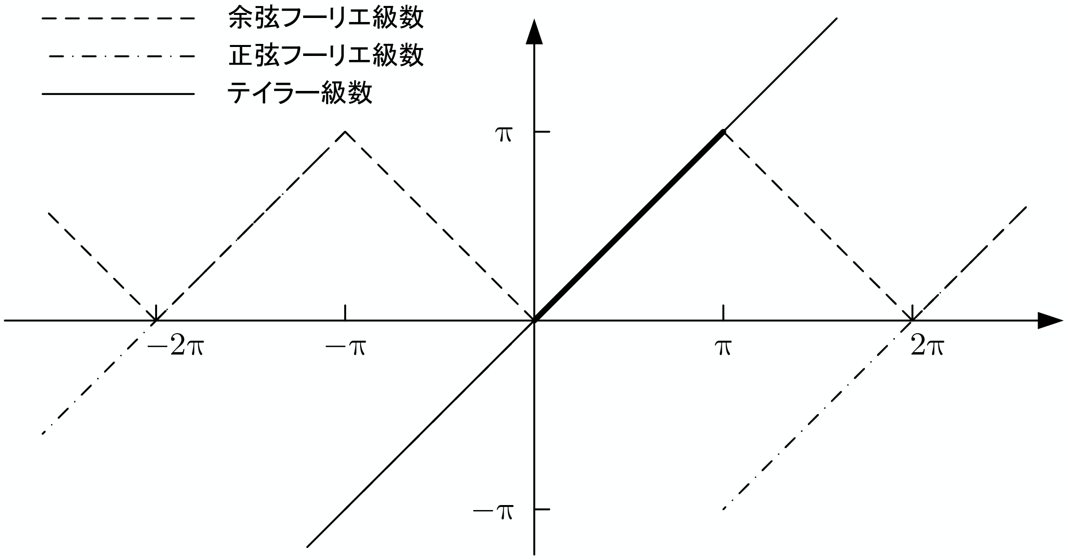

図 2: 区間 $[0, \pi]$ で $f(x) = x$ と定義された関数を様々な級数で表す.

3　課題

3.1　レポート 提出要領

期限　　11 月 21 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙　　A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所　山本研究室の入口のポスト
表紙　　表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること．
　　授業科目名「電気数学」
　　課題名「課題　(有限区間のフーリエ級数と最小二乗近似)」
　　提出日
　　3E　学籍番号　氏名
内容　　2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

3.2　課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

[問 1] 教科書の p.237 [1] 演習問題 IV-I の 2

[問 2] 区間 $[0, \pi]$ で，$f(x) = \sin x$ と定義された関数の正弦フーリエ級数と余弦フーリエ級数を求めよ．

[問 3] フーリエ級数が最良近似 (最小二乗法) になっていることを，式をきちんと変形して証明せよ．

3.3　小テスト

次回の授業のはじめに小テストを行う．以下の問題が 15 分以内に書けるように練習すること．

- 区間 $[0, \pi]$ で $f(x) = x$ と定義された関数の余弦フーリエ変換と正弦フーリエ変換を求める．

1 完全直交系

ある任意の関数 $g(x)$ を関数列 $\phi_n(x)$ で展開できる場合，それを完全系と言う．

$$g(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots \tag{11}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x) \tag{12}$$

そして，関数同志の積の積分で，

$$\int \phi_m(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 0\text{ より大きいある値} & (m = n) \end{cases} \tag{13}$$

の場合，直行系と言う．積分の範囲は関数の定義域である．特に，

$$\int \phi_m(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \tag{14}$$

の場合，規格化直行系[1]と呼ぶ．これら，完全系や直交系の話は，ベクトルを他のベクトル列の和で表すのと似ていることに注意せよ．

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.

[1] 正規化直交系と呼ばれることもある．