Chapter 4

L^p 空間

§4.1　Banach 空間

定義 4.1.1 (Norm). $K = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする。V を K-vector space とする。$N : V \to [0, +\infty)$ が次の (N1), (N2), (N3) の条件をみたすとき、N を V 上の norm という。
(N1)　$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(N2)　$x, y \in V$ に対して $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
(N3)　$\lambda \in K, x \in V$ に対して $N(\lambda x) \leq |\lambda| N(x)$.

vector space V とその上の norm N の対を normed vector space（ノルム空間）という。

命題 4.1.2. (V, N) を *normed vector space* とする。このとき $x, y \in V$ に対して $d(x, y) = N(x - y)$ と定義すれば d は V 上の距離となる。d を *norm* N に付随する V 上の距離、d から決まる V 上の位相を *norm* N に付随する V 上の位相という。

定義 4.1.3 (Banach space). (V, N) を normed vector space とする。N から誘導される距離 d に関して V が完備であるとき、(V, N) は Banach space であるという。

定義 4.1.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1) $1 \leq p < +\infty$ に対して、

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{ f | f \text{ は } X \text{ 上の } \mathcal{M}\text{-可測関数で } f^p \text{ が可積分} \}$$

とする。さらに $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ に対して

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

とおく。
(2) $f : X \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{M}$-可測関数とする。このとき、

$$||f||_\infty = \inf\{a|\mu(|f|^{-1}(a,+\infty)) = 0\}$$

と定義する。$||f||_\infty$ を $|f|$ の essential supremum という。さらに、

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) = \{f|f \text{ は } \mathcal{M}\text{-可測であり } ||f||_\infty < +\infty\}$$

厳密には $f : X \to \mathbb{R}$ または $f : X \to \mathbb{C}$ に応じて $\mathcal{L}^p(X,\mu,\mathbb{R})$ と $\mathcal{L}^p(X,\mu,\mathbb{C})$ が定義される。

補題 4.1.5. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。
(1) $p,q \geq 1$ は $1/p+1/q = 1$ をみたすとする。($p = \infty$ のときは $q = 1$, $p = 1$ のときは $q = \infty$ と考える。) このとき $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu), g \in \mathcal{L}^q(X,\mu)$ に対して $fg \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ であり、

$$||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q \tag{4.1.1}$$

が成立する。
(2) $1 \leq p \leq \infty$ とする。$f,g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ ならば $f+g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ であり、

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p. \tag{4.1.2}$$

(3) $1 \leq p \leq \infty$ とする。$f,g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ に対して $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ *for* μ-*a.e.* $x \in X$ と定義すると $\sim$ は $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ 上の同値関係である。さらに $L^p(X,\mu) = \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$ と定義し、$F \in L^p(X,\mu)$ に対して F の定める $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ の同値類から一つ f を選んで、$||F||_p = ||f||_p$ とおく。この定義は *well-defined* であり、$||\cdot||_p$ は $L^p(X,\mu)$ の *norm* となる。($f : X \to \mathbb{R}$ と考えているときは、$L^p(X,\mu)$ は $\mathbb{R}$-*vector space,* $f : X \to \mathbb{C}$ と考えているときは $L^p(X,\mu)$ は $\mathbb{C}$-*vector space* である。)

(4.1.1) を Hölder の不等式、(4.1.2) を Minkowski の不等式と呼ぶ。

注意. $F \in L^p(X,\mu)$ と F の定める $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ の同値類の元 f を同一視することが多い。すなわち $F \in L^p(X,\mu)$ は関数ではないのであるがあたかも $F : X \to \mathbb{R}$ のように扱うことが多い。

証明. (1) $(p,q) = (1,\infty)$ のときは μ-a.e. $x \in X$ で $f(x)g(x) \leq f(x)||g||_\infty$ より成立。

$1 < p, q < \infty$ とする。このとき、任意の $a, b \geq 0$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.1.3}$$

($c \leq c^p/p + 1/q$ を示し $c = ab^{-q/p}$ を代入する。)
いま $A = ||f||_p, B = ||g||_q$ とする。$A = 0$ または $B = 0$ のときは、μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = 0$ または μ-a.e. $x \in X$ で $g(x) = 0$ である。よって $||fg_1|| = 0$ となり (4.1.1) は成立。$A \neq 0$ かつ $B \neq 0$ と仮定する。ここで、$a = |f(x)|/A, b = |g(x)|/B$ とおき、(4.1.3) に代入して積分すれば、

$$\frac{\int_X |f(x)g(x)|d\mu}{AB} \leq \frac{1}{p}\frac{\int_X |f|^p d\mu}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_X |g|^q d\mu}{B^q} = 1$$

(2) f, g のかわりに $|f|, |g|$ を考えることで $f \geq 0,\ g \geq 0$ としても一般性を失わない。　$p = 1$ のときは明らか。また $p = \infty$ のとき $\mu(f^{-1}(a, +\infty)) = \mu(g^{-1}(b, +\infty)) = 0$ ならば $\mu((f+g)^{-1}(a+b, +\infty)) = 0$ より成立。よって $1 < p < \infty$ とする。ここで任意の $t \geq 0$ に対して $(1+t)/(1+t^p)^{1/p} \leq C$ となる $C \in (0, +\infty)$ がある。よって $(f(x)+g(x))^p \leq C^p(f(x)^p + g(x)^p)$. これより $f+g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. いま $1/p + 1/q = 1$ とすれば、$(f+g)^{p-1} \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$. よって (4.1.1) より

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)^p d\mu &= \int_X \big((f+g)^{p-1}f + (f+g)^{p-1}g\big)d\mu \\ &= ||(f+g)^{p-1}||_q(||f||_p + ||g||_p) \\ &= ||f+g||_p^{p/q}(||f||_p + ||g||_p).\end{aligned}$$

□

定理 4.1.6. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$1 \leq p \leq \infty$ とする。このとき $(L^p(X, \mu), ||\cdot||_p)$ は *Banach space* である。

証明. $||f||_p = ||f||, L^p(X, \mu) = L^p, \mathcal{L}^p(X, \mu) = \mathcal{L}^p$ と書く。
　$p = \infty$ のとき:$\{F_n\}_{n \geq 1}$ を L^∞ の Cauchy 列とし、$f_n \in \mathcal{L}^\infty$ を F_n の定める同値類の代表元とする。いま $A_{m,n} = \{x | x \in X, |f_m(x) - f_n(x)| > ||f_m - f_n||\}$ とおくと、$\mu(A_{m,n}) = 0$. 従って $A = \cup_{n,m \geq 1} A_{m,n}$ とすると $\mu(A) = 0$ である。ここで任意の $x \in A$, 任意の $n \geq 1$ に対して $f_n(x) = 0$ とおいても一般性を失わない。このとき任意の $x \in X$, 任意の $n, m \geq 1$ に対して $|f_m(x) - f_n(x)| \leq ||f_m - f_n||$ であるので、$\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である。$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ と定義するとき、命題 2.2.4-(3) より f は $\mathcal{M}$-

可測。さらに $\{||f_n||\}_{n\geq 1}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列であるので任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| \leq \sup_{n\geq 1}||f_n|| < +\infty$. よって $f \in \mathcal{L}^\infty$ である。さらに、$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||$ で $m \to \infty$ とすれば、$||f_n - f|| \leq \limsup_{m\to\infty}||f_n - f_m||$. よって $n \to \infty$ で $||f_n - f|| \to 0$. f の属する同値類を F であらわせば、$||F_n - F|| \to 0$ as $n \to \infty$.

$1 \leq p < \infty$ のとき：F_n, f_n を $p = \infty$ の場合と同じようにとる。いま $\{f_n\}_{n\geq 1}$ の部分列である $f \in \mathcal{L}^p$ に収束するものがとれれば、$\{f_n\}_{n\geq 1}$ 自身が $n \to \infty$ で f に収束することに注意する。ここで、$n_1 < n_2 < \dots$ で任意の $i \geq 1$ と任意の $m \geq n_i$ に対して、

$$||f_{n_i} - f_m|| \leq 2^{-i}$$

をみたすものが帰納的に選べる。ここで $g_k = f_{n_k}$ とおくと $||g_k - g_{k+1}|| \leq 2^{-k}$ である。いま、

$$h_k(x) = |g_1(x)| + \sum_{i=1}^{k-1}|g_{i+1}(x) - g_i(x)|$$

とおくとき、$\{h_k\}_{k\geq 1}$ は非負の単調増大列である。いま $||h_k|| \leq ||g_1|| + \sum_{i=1}^\infty ||g_{i+1} - g_i|| \leq ||g_1|| + 1 < +\infty$ である。よって $h(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x)$ とおくとき、単調収束定理より（定理 2.2.7）より、h は $\mathcal{M}$-可測であり、

$$\int_X h(x)^p = \lim_{k\to\infty}\int_X h_k(x)^p \leq (||g_1|| + 1)^p$$

従って $h \in \mathcal{L}^p$ である。ここで、

$$g_k(x) = g_1(x) + \sum_{i=1}^{k-1}(g_{i+1}(x) - g_i(x))$$

であり、$h(x) < \infty$ となる x では左辺は $k \to \infty$ で絶対収束する。よって μ-a.e. $x \in X$ で $g_k(x)$ は各点収束する。その極限を g と書くとき、$|g(x)| \leq h(x)$ であるから $g \in \mathcal{L}^p$. いま、

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \sum_{k=n}^\infty |g_k(x) - g_{k+1}(x)| \leq h(x)$$

従って、Lebesgue の収束定理（定理 2.4.3）により、$||g_n - g|| \to 0$ as $n \to \infty$. 以上より、$\{f_n\}_{n\geq 1}$ の部分列で収束するものがとれた。 □

命題 4.1.7. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$\mathcal{O}$ を X の位相とし $\mathcal{B}(X, \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{M}$ とする。いま、任意の開集合 O に対して $\mu(O) > 0$ とする。このとき $f, g \in C(X, \mathcal{O})$ で μ-*a.e.* $x \in X$ で $f(x) = g(x)$ ならば任意の $x \in X$ で $f(x) = g(x)$. とくに $1 \leq p \leq \infty$ に対して $C(X, \mathcal{O}) \cap \mathcal{L}^p(X, \mu) \subseteq L^p(X, \mu)$.

証明. $A = \{x | x \in X, f(x) \neq g(x)\}$ とするとき、$\mu(A) = 0$. いま $x \in A$ に対して $f(x) \neq g(x)$ より $f(x)$ の近傍 U と $g(x)$ の近傍 V を $U \cap V = \emptyset$ となるようにとれる。ここで $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ は空でない開集合であるが、任意の $y \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ に対して $f(y) \neq g(y)$ より $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq A$. これより $\mu(f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)) = 0$. これは矛盾。 □

定義 4.1.8. $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ のとき $L^p(X, \mu) = \ell^p$ とかく。

$$\ell^p = \{\{a_n\}_{n \geq 1} | \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty\}$$

であり $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \ell_p$ に対して、

$$||\{a_n\}_{n \geq 1}||_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{1/p}$$

である。$\{a_n\}_{n \geq 1}$ として実数列を考えるとき $\ell^p(\mathbb{R})$ と、複素数列を考えるときは $\ell^p(\mathbb{C})$ と書く。

§4.2 Hilbert 空間

以下 $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。

定義 4.2.1. V を K-vector space とする。$(\cdot, \cdot) : V \times V \to K$ が V の内積 (inner product) であるとは、
(HS1) 任意の $x \in V$ に対して $(x, x) \in [0, +\infty)$ であり、$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(HS2) 任意の $x, y \in V$ に対して $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
(HS3) 任意の $a_1, a_2 \in K$, 任意の $f_1, f_2, g \in V$ に対して $(a_1 f_1 + a_2 f_2, g) = a_1(f_1, g) + a_2(f_2, g)$.
をみたすこと。V とその内積 $(\cdot, \cdot)$ の対 $(V, (\cdot, \cdot))$ を metric vector space または pre-Hilbert space という。

命題 4.2.2. $(V,(\cdot,\cdot))$ を *pre-Hilbert space* とする。このとき、$x \in X$ に対して $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ と定義すれば $||\cdot||$ は V 上の *norm* になる。この *norm* から決まる V の距離及び位相を内積 $(\cdot,\cdot)$ から決まる V 上の距離および位相という。

定義 4.2.3. $(V,(\cdot,\cdot))$ を pre-Hilbert space とする。内積 $(\cdot,\cdot)$ から決まる V 上の距離に関して V が完備であるとき $(V,(\cdot,\cdot))$ を (K-)Hilbert space という。

例 4.2.4. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。このとき、$f,g \in L^2(X,\mu)$ に対して、

$$(f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu$$

と定義すると $(\cdot,\cdot)$ は $L^2(X,\mu)$ の内積である。(Hölder の不等式 (4.1.1) により $f\bar{g} \in L^1(X,\mu)$) この内積から決まる norm は $||\cdot||_2$ であるので、$(L^2(X,\mu),(\cdot,\cdot))$ は Hilbert space である。特に、$\ell_2(\mathbb{R}), \ell_2(\mathbb{C})$ の場合は、

$$(\{a_i\},\{b_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\overline{b_i}$$

である。

定義 4.2.5. $(V,(\cdot,\cdot))$ を pre-Hilbert space とする。$I = \mathbb{N}$ or $\{1,\ldots,m\}$ $(m \in \mathbb{N})$ とする。$(e_i)_{i\in I}$ $(e_i \in V)$ が $(V,(\cdot,\cdot))$ の正規直交系 (orthonormal system) であるとは、任意の $i,j \in I$ に対して $(e_i,e_i) = \delta_{ij}$ が成り立つことである。

命題 4.2.6. $(V,(\cdot,\cdot))$ を *pre-Hilbert space,* $(e_i)_{i\in I}$ をその正規直交系とする。このとき、任意の $x \in V$ に対して

$$(x,x) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |(x,e_i)|^2 \tag{4.2.1}$$

とくに $(V,(\cdot,\cdot))$ が *Hilbert space* ならば $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i,e_i)e_i$ は収束し、その極限を x_* とするとき $(x_*,x_*) = \sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2$.

(4.2.1) を Bessel の不等式という。

証明. $I = \mathbb{N}$, $K = \mathbb{R}$ とする。任意の $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_m \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(\sum_{i=1}^{m} a_ie_i, \sum_{i=1}^{m} b_ie_i) = \sum_{i=1}^{m} a_ib_i$$

である。ここで、$x_m = \sum_{i=1}^m (x, e_i)e_i$ とおけば、

$$||x - x_m||^2 = (x, x) - \sum_{i=1}^m (x, e_i)^2 = (x, x) - (x_m, x_m)$$

これより $(x, x) \le \sum_{i=1}^\infty (x, e_i)^2$. $(V, (\cdot, \cdot))$ を Hilbert space とする。$N \le n, m$ ならば、

$$||x_m - x_n||^2 \le \sum_{i \ge N} (x, e_i)^2$$

よって $\{x_m\}_{m \ge 1}$ は Cauchy 列であり極限をもつ。このとき $(x_*, x_*) = \lim_{n\to\infty}(x_n, x_n) = \sum_{i \in I}(x, e_i)^2$. □

定理 4.2.7. $(V, (\cdot, \cdot))$ を *Hilbert space*、$(e_i)_{i \in I}$ を正規直交系とする。このとき次の 3 つの条件は同値である。
(1) 任意の $x \in V$ に対して $x = \sum_{i \in I}(x_i, e_i)e_i$.
(2) 任意の $x \in V$ に対して、

$$(x, x) = \sum_{i \in I} |(x_i, e_i)|^2 \tag{4.2.2}$$

(3) $U = \{\sum_{i=1}^m a_i e_i | m \in I, a_1, \ldots, a_m \in K\}$ が V で稠密

(4.2.2) を Parseval の等式いう。

定義 4.2.8. $(V, (\cdot, \cdot))$ を Hilbert space, $(e_i)_{i \in I}$ をその正規直交系とする。$(e_i)_{i \in I}$ が定理 4.2.7 の条件のいずれかをみたすとき $(e_i)_{i \in I}$ は $(V, (\cdot, \cdot))$ の完全正規直交系 (complete orthonormal system) であるという。

証明. $I = \mathbb{N}, K = \mathbb{R}$ とする。$x_* = \sum_{i=1}^\infty (x_i, e_i)e_i$ とおく。
(1) ⇒ (2)：命題 4.2.6 より $(x_*, x_*) = \sum_{i=1}^\infty (x_i, e_i)^2$. $x = x_*$ より (4.2.2) がでる。
(2) ⇒ (1)：$(x - x_*, x - x_*) = \sum_{i=1}^\infty (x_i, e_i)^2$ より明らか。
(1) ⇒ (3)：明らか
(3) ⇒ (1)：任意の i に対して $(x_*, e_i) = (x, e_i)$. よって、任意の $z \in U$ に対して

$$(x - x_* - z, x - x_* - z) = (x - x_*, x - x_*) + (z, z) \ge (x - x_*, x - x_*).$$

(3) より $z \in U$ で上の式の左辺がいくらでも 0 に近くなるものがある。よって $||x - x_*|| = 0$. すなわち $x = x_*$. □

定理 4.2.9. *separable Hilbert space* は完全正規直交系を持つ。

証明. $(V,(\cdot,\cdot))$ を separable Hilbert space とする。$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を V の稠密な可算部分集合とする。(任意の i に対して $x_i \neq 0$ としても一般性を失わない。) このとき、I および正規直交系 $(e_i)_{i\in I}$ で任意の n 似たいして次の条件を満たすものを帰納的に構成する。

U_n を $e_1,\ldots,e_n$ で生成される V の部分空間とするとき、$x_1,\ldots,x_n \in U_n$.

構成法：(1) $n=1$ では $e_1 = x_1/||x_1||$ とする。$e_1 \in U_1$ は明らか。

(2) $n=m$ まで条件を満たすものが構成できたとき、

任意の $k \geq m$ で $x_{m+k} \in U_n$ ならば $I=\{1,\ldots,n\}$ として終了。

そうでなければ $x_{m+k} \in U_n$ となる最小の k をとり、

$$y = x_{m+k} - \sum_{i=1}^{n}(x_{m+k},e_i)e_i, e_{n+1} = y/||y||$$

とおく。このとき $(e_1,\ldots,e_{m+1})$ は正規直交系となり $x_{m+1} \in U_{m+1}$.

$n=m+1$ として (2) に戻る。

(2) の構成が無限に続くときは $I=\mathbb{N}$ とする。以上

この構成法によりできた $(e_i)_{i\in I}$ に対して任意の i で $x_i \in U$. $\{x_i\}_{i\geq 1}$ は V で稠密より U も V で稠密。定理 4.2.7 より $(e_i)_{i\in I}$ は V の完全正規直交系である。 □

Chapter 5

Fourier 級数

§5.1　Fourier 級数の定義

$S^1 = \mathbb{R}/(2\pi)\mathbb{Z}$ とする。$L^2(S^1, \mu, \mathbb{C}) = L^2([0, 2\pi], m_1, \mathbb{C}) = L^2([-\pi, \pi], m_1, \mathbb{C})$ に注意。（m_1 は Lebesgue 測度）以降この空間を $L^2(S^1)$ と書く。$f, g \in L^2(S^1)$ に対して、

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義する。$L^2(S^1)$ は $(\cdot, \cdot)$ を内積とする Hilbert space である。

ここで $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ に対して

$$C^m(S^1) = \{f | f : S^1 \to \mathbb{C}, f \text{ は } C^m \text{ 級}\}$$

（C^0 級 $=$ 連続）さらに、

$$C_P^m(\mathbb{R}) = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \text{ は } 2\pi \text{ を周期とする周期関数で } C^m \text{ 級}\}$$

とおく。このとき、$C^m(S^1)$ と $C_P^m(\mathbb{R})$ は同一視できる。また、$C^m(S^1) \subseteq L^2(S^1, m_1)$.

命題 5.1.1. $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

と定義する。ただし $n = 0$ のときは $\varphi_0(x) = (2\pi)^{-1/2}$ とする。このとき $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の正規直交系である。

定義 5.1.2. $f \in L^1(S^1) = L^1([0, 2\pi])$ とする。$n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$F_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

とおき、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$$

を f の（形式的）Fourier 級数展開という。

補題 5.1.3. *$f \in L^2(S^1)$ のとき f の Fourier 級数展開は $L^2(S)$ では収束し、*

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)^2 \tag{5.1.1}$$

証明. $f \in L^2(S^1, m_1)$ のときは $F_n(f) = \sqrt{2\pi}(f, \varphi_n)$ かつ $F_n(f)e^{inx} = (f, \varphi_n)\varphi_n$ である。命題 5.1.1 より $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の 正規直交系である。よって命題 4.2.6 より補題が示される。 □

(5.1.1) も Bessel の不等式と呼ばれる。

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt$$

とおくとき

$$F_n(f)e^{inx} + F_{-n}(f)e^{-inx} = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$$

であるので、形式的 Fourier 級数展開は、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos nx + \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin nx$$

と書くこともできる。ここで

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

も $L^2(S^1)$ の正規直交系であることに注意。

§5.2 Fourier 級数の収束 I

Fourier 級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$ の収束は、$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(f,\varphi_n)\varphi_n$ の収束にほかならない。いま

$$S_N(f) = \sum_{n:|n|\le N} F_n(f)e^{inx} = \sum_{n:|n|\le N}(f,\varphi_n)\varphi_n$$

と定義する。このとき、

$$(f,\varphi_n)\varphi_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\varphi_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\varphi_n(t)dt$$

である。ここで、

$$\sum_{|n|\le N}\varphi_n(t) = \frac{\cos Nx - \cos(N+1)x}{1-\cos x}$$

よって、

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\frac{\cos Nx - \cos(N+1)x}{1-\cos x}dt. \tag{5.2.1}$$

である。

定理 5.2.1 (Fejér の定理). $f \in C^0(S^1)$ とする。いま $\sigma_N(f) = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$ とおけば $\sigma_N(f)$ は f に S^1 上 $N\to\infty$ で一様収束する。

無限級数 $\sum_{n\ge1} a_n$ に対して、$S_N = \sum_{n=1}^N a_n, \sigma_N = N^{-1}\sum_{n=1}^N S_n$ とおく。このとき $S\in\mathbb{C}$ に対して

$$S = \sum_{n\ge1} a_n \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} S_n = S \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_N = S$$

このとき最後の $\Leftarrow$ の逆は成り立たない。たとえば、$a_n = (-1)^n$ のとき、$N\to\infty$ で $\sigma_N\to 0$ であるが、$\sum_{n\ge1} a_n$ は収束しない。一般に $N\to\infty$ で $\sigma_N \to S$ となるとき、S を $\sum_{n\ge1} a_n$ の Cesàro の意味の和（Cesàro mean, Cesàro の総和法による和）という。

証明. (5.2.1) より、

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt \tag{5.2.2}$$

とくに $f=1$ のときは、

$$\sigma_N(1) = 1 = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt$$

したがって、

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt$$

である。いま $f \in C^0(S^1)$ より f は一様連続であるので、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって $|t| < \delta$ ならば任意の x に対して $|f(x-t)-f(x)| < \epsilon$. よって、

$$\frac{1}{2\pi N}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt \le \frac{\epsilon}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt \le \epsilon.$$

また $\delta \le |t| \le \pi$ では $(1-\cos Nt)/(1-\cos t) \le 2/(1-\cos\delta)$. さらに $|f(x-t)-f(x)| \le 2||f||_\infty$. よって、

$$\frac{1}{2\pi N}\int_{\delta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt \le \frac{2||f||_\infty}{\pi N(1-\cos\delta)}$$

$\int_{-\pi}^{\delta}$ についても同様の評価が成り立つので、

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \le \epsilon + \frac{4||f||_\infty}{\pi N(1-\cos\delta)}.$$

N を十分大きくとれば、

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \le 2\epsilon$$

である。従って、$\sigma_N(f)$ は $N\to\infty$ で f に一様収束する。 □

系 5.2.2. $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の完全正規直交系である。すなわち任意の $f \in L^2(S^1)$ に対して $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$ は $L^2(S^1)$ で収束し f に等しい。

証明. $U = \{\sum_{|n|\le m} a_n\varphi_n | m \ge 0, a_n \in \mathbb{C}\}$ とおくとき、U は $C^0(S^1)$ において $||\cdot||_\infty$ に関して稠密である。いま $C^0(S^1) \subseteq L^2(S^1)$ であり $||\cdot||_2 \le (2\pi)^{-1/2}||\cdot||_\infty$ より U は $C^0(S^1)$ において $||\cdot||_2$ に関して稠密である。さらに定理 3.1.1 及び 3.1.6 より、任意の $f \in L^2(S^1)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$\int_0^{2\pi}|f^2-G|dx<\epsilon$ となる $G\in C^0(S^1)$ が存在する。ここで $f\geq 0$ とするとき $G\geq 0$ としてもよい。このとき $g=G^{1/2}$ とすると、

$$|f-g|^2\leq|f-g||f+g|=|f^2-G|$$

従って $||f-g||_2\leq\epsilon$. 一般の $f\in L^2(S^1)$ についても f_+,f_- に分解することで、$C^0(S^1)$ が $L^2(S^1)$ で稠密であることが分かる。以上より、U は $L^2(S^1)$ で稠密であり定理 4.2.7 より $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の完全正規直交基底になる。 □

系 **5.2.3 (Weierstrass の多項式近似定理).**

$$C([0,1])=\{f|f:[0,1]\to\mathbb{C},f \text{ は } [0,1] \text{ 上連続}\}$$

とする。多項式の全体は $C([0,1])$ で $||\cdot||_\infty$ に関して稠密である。すなわち任意の $f\in C([0,1])$ に対して f に $n\to\infty$ で一様収束する多項式の列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が存在する。

証明. $f\in C([0,1])$ に対して、$F\in C^0(S^1)$ で $F|_{[0,1]}=f$ となるものが存在する。ここで、φ_n はそのベキ級数展開を考えれば $[0,1]$ 上多項式で一様に近似できる。従って $\sigma_N(F)$ は $[0,1]$ 上多項式で近似できる。定理 5.2.1 より $\sigma_N(F)$ は F に $N\to\infty$ で一様収束するのだから f は $[0,1]$ 上多項式で一様に近似できる。 □

§5.3 Fourier 級数の収束 2

定理 **5.3.1.** $f\in C^2(S^1)$ とするとき、任意の $N\geq 1$ に対して

$$||S_N(f)-f||_\infty\leq\frac{1}{N\pi}||f''||_1$$

特に $S_N(f)$ は f に $N\to\infty$ で一様収束する。

補題 **5.3.2.** $f\in C^1([0,2\pi])$ ならば、

$$F_n(f')=\frac{(f(2\pi)-f(0))}{2\pi}+inF_n(f)$$

$f\in C^2([0,2\pi])$ ならば

$$F_n(f'')=\frac{(f'(2\pi)-f'(0))}{2\pi}+\frac{in(f(2\pi)-f(0))}{2\pi}-n^2F_n(f)$$

定理 *5.3.1* の証明. 補題 5.3.2 より

$$n^2|F_n(f)| = |F_n(f'')| \leq \frac{||f''||_1}{2\pi}$$

従って、

$$\sum_{|n|\geq N+1} |F_n(f)| \leq \frac{||f''||_1}{\pi} \int_N^\infty \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{||f''||_1}{N\pi}$$

これより $S_N(f)$ は $N \to \infty$ で絶対一様収束する。いま $S_N(f)$ は $N \to \infty$ で f に $L^2(S^1)$ で収束しており f は連続なので、$S_N(f)$ の一様収束極限は f に等しい。よって、

$$|S_N(f) - f(x)| \leq \sum_{|n|\geq N+1} |F_n(f)| \leq \frac{||f''||_1}{N\pi}$$

□

定理 5.3.3. $f \in C^1(S^1)$ とする。このとき $S_N(f)$ は $N \to \infty$ で f に絶対一様収束する。

証明. 補題 5.3.2 より $F(f') = inF_n(f)$. いま $f' \in L^2(S^1)$ であるので、

$$\sum_{n\geq 1} F(f')^2 = \sum_{n\geq 1} n^2 F_n(f)^2 < +\infty.$$

相加相乗平均の関係より、

$$|F_n(f)| \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + n^2 F_n(f)^2\Big).$$

これらより $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(f)| < +\infty$. 優級数が収束するので、$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$ は絶対収束する。あとは定理 5.3.3 の証明と同様 □

じつはある定数 $C > 0$ があって、任意の $f \in C^1(S^1)$ および任意の N に対して、

$$||S_N(f) - f||_\infty \leq \frac{C||f'||_\infty}{\sqrt{N}}$$

が成立する。

定理 5.3.4. $f \in L^2(S^1)$ とする。$x \in S^1$ に対して $f(x\pm 0) = \lim_{a\to\pm 0} f(x+a)$（複号同順）が存在し、さらに

$$f'(x \pm 0) = \lim_{h\to\pm 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

（複号同順）が存在するとき、

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

証明. $D_N(x) = \sin{(N+1/2)x}/\sin x/2$ とおくと (5.2.1) より

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_N(y)dy$$

である。いま $S_N(1) = 1$ であり、D_N は偶関数なので、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_N(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(y)dy = \frac{1}{2} \tag{5.3.1}$$

ここで g を

$$g(y) = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}y}\begin{cases} f(x-y) - f(x+0) & y \in [-\pi, 0] \text{ のとき}, \\ f(x-y) - f(x-0) & y \in (0, \pi] \text{ のとき}. \end{cases}$$

とおけば、(5.3.1) より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin{(N+1/2)y}dy = S_N(f)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{5.3.2}$$

ここで

$$\lim_{y\to\pm 0} g(y) = \lim_{y\to\pm 0} \frac{y}{\sin\frac{1}{2}y}\frac{f(x-y) - f(x\mp 0)}{y} = -2f'(x\mp 0).$$

よってある $\delta \in (0,\pi)$ に対して $|g(y)|$ は $|y| \leq \delta$ で有界である。さらに $\delta \leq |y| \leq \pi$ では $|\sin\frac{1}{2}y| \geq \sin\frac{\delta}{2}$ であるから、

$$|g(y)| \leq \frac{|f(x-y)| + |f(x\pm 0)|}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

これより $g(y) \in L^2(S^1)$. ここで $h_1(y) = g(y)\cos\frac{1}{2}y, h_2(y) = g(y)\sin\frac{1}{2}y$ とおけば $h_1, h_2 \in L^1(S^1)$ であり、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin{(N+1/2)y}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_2(y)\cos Ny + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_1(y)\sin Nydy \tag{5.3.3}$$

$a_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_1(y)\sin Nydy, b_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_2(y)\cos Nydy$ とおくと、$|a_N| \leq |F_N(h_1)|, |b_N| \leq |F_N(h_2)|$. いま $h_1, h_2 \in L^2(S^1)$ より $\lim_{N\to\infty} F_N(h_i) = 0$ であるので、$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} b_N = 0$. (5.3.2) と (5.3.3) より証明ができた。 □

D_N を Dirichlet 核と呼ぶ。

§5.4　Gibbs の現象

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\pi - x & x \in [-\pi, 0), \\ \pi - x & x \in (0, \pi], \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

と定義する。このとき、$\Phi(x)$ の Fourier 級数展開は、

$$2\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin nx}{n}$$

である。いま、

$$\Phi_N(x) = S_N(\Phi)(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$$

とおくと、定理 5.3.4 により $\Phi_N(x)$ は $\Phi(x)$ に $N \to \infty$ で各点収束する。いま、

$$\Phi'_N(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \cos nx = 2\frac{\cos\left(\frac{N+1}{2}x\right)\sin\frac{N}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

これより $x = \pi/(N+1)$ で Φ_N は最大値をとることが分かる。$N \to \infty$ で

$$\Phi_N\Big(\frac{\pi}{N+1}\Big) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+1}\frac{N+1}{n}\sin\Big(\frac{n}{N+1}\Big) \to$$

$$2\int_0^1 \frac{\sin\pi x}{x}dx = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$$

いま $x \in (0,\pi)$ で $\sin x/x > 1 - x/\pi$ より、

$$\lim_{N\to\infty} \Phi_N\Big(\frac{\pi}{N+1}\Big) = 2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx > 2\int_0^\pi (1-\frac{x}{\pi})tdx = \pi.$$

同様に

$$\lim_{N\to\infty} \Phi_N\Big(\frac{-\pi}{N+1}\Big) = -2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx < -\pi.$$

定理 5.4.1. $f : S^1 \to \mathbb{C}$ は区分的に C^1 級とする。すなわちある $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 2\pi$ と $[x_{k-1}, x_k]$ 上 C_1 級の $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{C}$ があって、任意の k に対して $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ならば $f(x) = f_k(x)$ となる。このとき
(a) 任意の x に対して $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x)$.
(b) $[a,b]$ 上で f が連続ならば $S_N(f)$ は $[a,b]$ 上 $N\to\infty$ で f に一様収束する。
(c) 任意の x に対して

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)\big(x \pm \frac{\pi}{N+1}\big) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \pm \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}G_*,$$

（複号同順）ただし

$$G_* = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}dy > 1.$$

特に $f(x+0) > f(x-0)$ のときは $\lim_{N\to\infty} S_N(f)\big(x + \frac{\pi}{N+1}\big) > f(x+0)$.

(c) の事実を Gibbs の現象 (Gibbs phenomena) という。特に Fourier 級数展開は不連続点を含む区間上では必ず一様収束しない。

補題 5.4.2. $0 < a < b < 2\pi$ とするとき Φ_N は $[a,b]$ 上 Φ に一様収束する。

証明. $g(x) = x/\sin(x/2)$ とおく。$x \in (0, 2\pi)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\Phi_N(x) - \Phi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Phi(x-y) - \Phi(x))D_N(y)dy \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} g(y)\sin{(N+\frac{1}{2})}ydy \\
=&\frac{1}{2\pi}\Big(\big[-g(y)\frac{cos\big(N+\frac{1}{2}\big)y}{N+\frac{1}{2}}\big]_{x-2\pi}^{x} + \int_{x-2\pi}^{x} g'(y)\frac{\cos{(N+\frac{1}{2})}y}{N+\frac{1}{2}}dy\Big) \\
=&\frac{1}{2\pi(N+\frac{1}{2})}\Big(-2\pi\frac{\cos{(N+\frac{1}{2})}x}{\sin\frac{x}{2}} + \int_{x-2\pi}^{x} g'(y)\cos{(N+\frac{1}{2})}ydy\Big)
\end{aligned}$$

ここで $M=\inf_{y\in[a,b]}\sin\frac{x}{2}, L=\sup_{y\in[a-2\pi,b]}|g'(y)|$ とするとき $M,L\in(0,+\infty)$ であり

$$|\Phi_N(x)-\Phi(x)|\le\frac{1}{N+\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{M}+L\Big)$$

よって $[a,b]$ 上 Φ_N は Φ に $N\to\infty$ で一様収束する。 □

定理 *5.4.1* の証明. f の不連続点の全体を $\{c_1,\dots,c_m\}$, $k=1,\dots,m$ に対して $A_k=f(c_k+0)-f(c_k-0)$ とおくとき、

$$f(x)=h(x)+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{2\pi}\Phi(x-c_k)$$

と書ける。ただし h は $h\in C^0(S^1)$ で区分的に C^1 級の関数である。これより

$$S_N(f)(x)=S_N(h)(x)+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{2\pi}S_N(\Phi)(x-c_k)$$

定理 5.3.3 及び 5.3.4 により任意の x で $N\to\infty$ のとき $S_N(h)(x)\to h(x), S_N(\Phi)(x)\to\Phi(x)$ より $S_N(f)(x)\to f(x)$. よって (a).
いま $S_N(h)$ は S^1 上 $N\to\infty$ で h に一様収束。また $[a,b]$ が不連続点を含まないなら補題 5.4.2 より任意の k に対して $[a,b]$ 上 $S_N(\Phi)(x-c_k)$ は $\Phi(x-c_k)$ に $N\to\infty$ で一様収束する。従って $S_N(f)$ は $[a,b]$ 上 $N\to\infty$ で f に一様収束する。よって (b).
x で f が連続のとき、x の十分小さな近傍で $S_N(f)$ は f に $N\to\infty$ で一様収束する。よって $\lim_{N\to\infty}S_N(f)\big(x\pm\frac{\pi}{N+1}\big)=f(x)$. $x=c_k$ のとき、$H_k(x)=h(x)+\sum_{j:j\neq k}\frac{A_j}{2\pi}\Phi(x-c_j)$ とおくと H_k は c_k で連続。(b) より $\lim_{N\to\infty}S_N(H_k)\big(c_k\pm\frac{\pi}{N+1}\big)=H_k(c_k)=(f(c_k+0)+f(c_k-0))/2$. これより $N\to\infty$ で

$$\begin{aligned}S_N(f)\big(x\pm\frac{\pi}{N+1}\big)&=S_N(H_k)\big(x\pm\frac{\pi}{N+1}\big)+\frac{A_k}{2\pi}\Phi_N\big(x\pm\frac{\pi}{N+1}\big)\\&\to\frac{f(c_k-0)+f(c_k+0)}{2}+\frac{A_k}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin y}{y}dy\end{aligned}$$

□

Chapter 6

Fourier 変換

§6.1 Convolution

定理 6.1.1. $p \in [1, \infty]$ とする。$f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

（ただし $dy = d\mu(y)$ の意味）とおくとき、$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ であり、

$$||f * g||_p \leq ||f||_p ||g||_1 \tag{6.1.1}$$

が成り立つ。

注意. 以降、簡単のため n 次元 Lebesgue 測度 μ_n に関する積分 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x)$ を $\int f(x)dx$ と書く。また「μ_n-a.e.」を単に「a.e.」と書く。

補題 6.1.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測とする。このとき $F(x, y) = f(x-y)$ は $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ として $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$-可測である。

証明. $\mathcal{F} = \{A | A \subseteq \mathbb{R}^n, \chi_A(x-y)$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$-可測 $\}$ とおく。A を開集合とすると、$\chi_A(x-y) = \chi_{\widetilde{A}}(x, y)$, ただし $\widetilde{A} = \{(x, y) | x - y \in A\}$. ここで $\widetilde{A}$ は開集合であるので $A \in \mathcal{F}$. ここで $\mathcal{F}$ は σ-加法族であるので $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. これより f が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に関する単関数のときは O. K. 一般の可測関数 f は単関数の各点収束極限で表されるので命題 2.2.4-(3) よりこの場合も O. K. □

定理 *6.1.1* の証明. $p = \infty$ のときは

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \leq ||f||_\infty \int |g(y)|dy$$

より明らか。$1 < p < \infty$ とする。いま

$$\int \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)| dx \right) dy = ||f||_p^p ||g||_1 \tag{6.1.2}$$

であるので、Fubini の定理（定理 2.7.2）より $\int |f(x-y)|^p |g(y)| dy$ は $x \in \mathbb{R}^n$ を変数とする関数として a. e. $x \in \mathbb{R}^n$ で有界であり $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測である。とくに $F_x(y) = |f(x-y)||g(y)|^{1/p}$ とおけば a.e.$x \in \mathbb{R}^n$ で $F_x \in L^p(\mathbb{R}^n)$ である。 ここで、Hölder の不等式 (4.1.1) より、q を $1/p + 1/q = 1$ をみたすように選べば、

$$\begin{aligned} \int |f(x-y)||g(y)| dy &= \int F_x(y) |g(y)|^{1/q} dy \leq ||F_x||_p ||g||_1^{1/q} \\ &= \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right)^{1/p} ||g||_1^{1/q}. \end{aligned}$$

これを p 乗して x に関して積分して (6.1.2) を用いれば (6.1.1) が得られる。 □

$f * g$ を f と g の convolution（畳み込み）という。
$m = 0, 1, \ldots, \infty$ に対して

$$C_c^m(\mathbb{R}^n) = \{ f | f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \text{ は } C^m \text{ 級かつ台コンパクト} \}$$

とする。特に $m = 0$ のとき $C_c^0(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n)$ と書く。

定理 6.1.3. $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ は可測かつ可積分であり、$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ をみたすとする。$t > 0$ に対して $\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(x/t)$ と定義する。$p \in (1, \infty)$ とすると、任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して、$||f * \varphi_t||_p \leq ||f||_p$ であり $t \downarrow 0$ で $||f * \varphi_t - f||_p \to 0$ である。

補題 6.1.4. φ は定理 *6.1.3* と同じ条件をみたすとする。いま $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であり、$f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき $\mathbb{R}^n$ 上 $t \downarrow 0$ で $f * \varphi_t$ は f に一様収束する。

証明. $\int \varphi_t(x) dx = 1$ に注意すれば

$$f * \varphi_t(x) - f(x) = \int (f(x-y) - f(x)) \varphi_t(y) dy$$

f は $\mathbb{R}^n$ 上一様連続であるから任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ がとれて任意の x, y に対して $|x-y| > \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立つ。これより、

$$|f*\varphi_t(x) - f(x)| \leq \epsilon + \int_{|y|\geq\delta} |f(x-y) - f(x)|\varphi_t(y)dy \leq \epsilon + 2||f||_\infty \int_{|z|\geq\delta/t} \varphi(z)dz$$

$\lim_{t\to\infty} \int_{|z|\geq\delta/t} \varphi(z)dz = 0$ より t が十分小さいなら $|f * \varphi_t(x) - f(x)| < 2\epsilon$. ($t$ の選び方は x によらないことに注意) よって $f * \varphi_t$ は f に一様収束する。 $\square$

定理 6.1.3 の証明. Step 1: f, φ ともに台コンパクトで f が連続のとき
$r > 0$ に対して $D_r(x) = \{y | y \in \mathbb{R}^n, |x-y| \leq r\}$ とおく。いま $\operatorname{supp} f \subseteq D_r(0), \operatorname{supp} \varphi \subseteq D_r(0)$ とする。このとき、$\operatorname{supp} \varphi_t = D_{tr}(0)$. よって、$f(x-y)g(y) \neq 0$ ならば $x \in D_r(x) \cap D_{tr}(0)$. いま $|x| \geq 2r$, $0 < t < 1$ ならば任意の y に関して $f(x-y)g(y) = 0$. よって、$0 < t < 1$ のとき $\operatorname{supp} f * \varphi_t \subseteq D_{2r}(0)$. ここで補題 6.1.4 より $f * \varphi_t$ は $D_{2r}(0)$ 上では f に一様収束する。よって $t \downarrow 0$ で

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * \varphi_t(x) - f(x)|^p dx = \int_{D_{2r}(0)} |f * \varphi_t(x) - f(x)|^p dx \to 0.$$

Step 2: 一般の場合
$C_c(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密であるから任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して、$\{f_n\}_{n\geq1} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ で $n \to \infty$ で $||f - f_n||_p \to 0$ となるものがとれる。さらに、φ に対して、$\varphi^n(x) = \varphi(x)\chi_{D_n(0)} / \int_{D_n(0)} \varphi(y)dy$ とおくとき $n \to \infty$ で $||\varphi - \varphi^n||_1 \to 0$ である。ここで、

$$\begin{aligned}
&||f * \varphi_t - f|| \\
\leq& ||f * \varphi_t - f_n * \varphi_t||_p + ||f_n * \varphi_t - f_n * \varphi_t^n||_p + ||f_n * \varphi_t^n - f_n||_p + ||f_n - f||_p \\
\leq& ||f - f_n||_p ||\varphi_t||_1 + ||f_n||_p ||\varphi_t - \varphi_t^n||_1 + ||f_n * \varphi_t^n - f_n||_p + ||f - f_n||_p \\
\leq& 2||f - f_n||_p + M||\varphi - \varphi^n|| + ||f_n * \varphi_t^n - f_n||_p
\end{aligned}$$

ただし $M = \sup_{n\geq1} ||f_n||_p$. ここで n を十分大きくとれば、$2||f - f_n||_p + M||\varphi - \varphi^n||_1 < \epsilon/2$. 次に Step 1 の結果より n を固定して t を十分小さくとれば $||f_n * \varphi_t^n - f_n||_p < \epsilon/2$. したがって t が十分小さければ $||f * \varphi_t - f||_p < \epsilon$. 以上より $t \downarrow 0$ で $||f - f_n||_p \to 0$. $\square$

§6.2 Schwartz 空間

$\mathbb{N}_* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。

記号. $n \in \mathbb{N}$ とする。$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して、

$$x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots {x_n}^{\alpha_n}$$
$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$$

とおく。ただし $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ である。

とくに $\alpha = (0, \ldots, 0)$ のときは $D^\alpha f = f, x^\alpha = 1$ である。

定義 6.2.1. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする。$\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して、

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)||x^\beta|$$

と定義する。さらに

$$\mathcal{S} = \{f | f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{任意の } \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n \text{ に対して } |f|_{\alpha,\beta} < +\infty\}$$

$\mathcal{S}$ を Schwartz 空間という。$f \in \mathcal{S}$ を急減少関数 (rapidly decreasing functions) という。

明らかに $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$. また任意の $p \in [1, \infty]$ に対して $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$.

例 6.2.2. $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$.

命題 6.2.3. $\mathcal{S}$ は通常の関数の和およびスカラー倍に対してベクトル空間をなす。さらに $f, g \in \mathcal{S}$ ならば $fg \in \mathcal{S}$ である。また h を多項式とするとき、$f \in \mathcal{S}$ ならば $hf \in \mathcal{S}$ である。

定理 6.2.4. $\varphi \in \mathcal{S}$ であり任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\varphi(x) \geq 0$ かつ $\int \varphi(x) dx = 1$ とする。いま $\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(x/t)$ とおく。$p \in [1, \infty)$ ならば任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\lim_{t \downarrow 0} ||f * \varphi_t - f||_p = 0.$$

さらに任意の $t > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $f * \varphi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。

証明. $\lim_{t \downarrow 0} ||f * \varphi_t - f||_p = 0$ は定理 6.1.3 より。$f * \varphi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ は次の補題による。 □

例 **6.2.5.** 定理の条件をみたす φ としては、

$$\frac{1}{\pi^{n/2}}e^{-|x|^2}$$

また、台コンパクトな例として（$n=1$ の場合）

$$k(x)=\begin{cases} c\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & (|x|<1), \\ 0 & (|x|\geq 1). \end{cases}$$

がある。（定数 c は $\int k(x)dx=1$ となるように選ぶ。）φ が台コンパクトなとき $\{\varphi_t\}_{t>0}$ を modifier（軟化子）という。

補題 **6.2.6.** $p\in[0,\infty]$ とする。任意の $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ と任意の $g\in\mathcal{S}$ に対して $f*g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。さらに任意の $\alpha\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$D^\alpha(f*g)=f*(D^\alpha g)$$

証明. 簡単のため $n=1$ の場合に示す。いま変数変換をおこなえば、

$$(f*g)(x)=\int g(x-y)f(y)dy$$

である。$q\geq 1$ を $1/p+1/q=1$ となるようにとる。ここで、$G(x)=\sup_{y\in[x-1,x+1]}|g'(y)|$ とする。いま $g\in\mathcal{S}$ より、$c=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g'(x)(1+x^2)|<\infty$. これより

$$H(x)=\begin{cases} 1 & (|x|\leq 1) \\ \frac{1}{1+|x-1|^2} & (x\geq 1) \\ \frac{1}{1+|x+1|^2} & (x\leq -1) \end{cases}$$

とおけば $0\leq G(x)\leq cH(x)$ となる。ここで $H\in L^q(\mathbb{R})$ であるので Hölder の不等式より $H(x-y)f(y)$ は y に関して可積分である。さていま

$$\frac{(f*g)(x+h)-(f*g)(x)}{h}=\int\frac{g(x+h-y)-g(x-y)}{h}f(y)dy \tag{6.2.1}$$

であり、平均値の定理より $|h|\leq 1$ ならば、ある $\theta\in(0,1)$ に対して

$$\left|\frac{g(x+h-y)-g(x-y)}{h}\right|=|g'(x+\theta h-y)|\leq G(x-y)\leq cH(x-y)$$

Lebesgue の収束定理（定理 2.4.3）により、(6.2.1) で $h\to 0$ とすれば、$(f*g)'(x)=(f*g')(x)$. $g'\in\mathcal{S}$ より同じ議論を繰り返せば $(f*g)''(x)=(f*g'')(x)$. 以下帰納的にこの補題が示される。 □

系 **6.2.7.** $p \in [1, \infty)$ とする。このとき $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密である。とくに $\mathcal{S}$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ の稠密な部分空間である。

証明. 定理 6.2.4 の条件をみたす $\varphi \in \mathcal{S}$ で台コンパクトなものを選ぶ。$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ が台コンパクトならば $f * \varphi_t$ も台コンパクトである。定理 6.2.4 より $f * \varphi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ であり、$t \downarrow 0$ で $||f * \varphi_t - f||_p \to 0$. よって、$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $L_c^p(\mathbb{R}^n) = \{f | f \in L^p(\mathbb{R}^n), f$ は台コンパクト$\}$ で稠密である。いま $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密より系が示された。 □

§6.3 Fourier 変換

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ とする。次の積分を考える。

$$(\mathcal{F}_n f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ixy} dy \tag{6.3.1}$$

(ただし、xy は x と y の $\mathbb{R}^n$ での標準的な内積を表す。すなわち、$x = (x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n$ のとき $xy = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ である。)もちろん (6.3.1) の積分が意味を持つ($\pm\infty$ も含めて値をもつ)ときにしか、$(\mathcal{F}_n f)(x)$ は定義できない。特に、すべての $x \in \mathbb{R}^n$ で $(\mathcal{F}_n f)(x)$ が意味を持つとき $\mathcal{F}_n f$ を f の Fourier 変換という。混乱がおこらない時には $\mathcal{F}_n$ を $\mathcal{F}$ と書く。また簡単のため $\widehat{f} = \mathcal{F} f$ と書く。$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ で $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が Borel 可測のときは Fubini の定理により、

$$(\mathcal{F}_n f)(x_1, \ldots, x_n) = (\mathcal{F}_1 f_1)(x_1) \cdots (\mathcal{F}_n f_n)(x_n) \tag{6.3.2}$$

である。

例 **6.3.1.** $f(x) = e^{-t|x|^2}$ とするとき、

$$(\mathcal{F} f)(x) = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

である。なぜなら、$e^{-t|x|^2} = e^{-tx_1^2} \cdots e^{-tx_n^2}$ であるから、(6.3.2) より、$n = 1$ の場合を示せばよい。いま、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ty^2 - ixy) dy &= e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\Big(\sqrt{t} y + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\Big)^2 dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\Big(z + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\Big)^2 dz\end{aligned}$$

いま
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\Big(z+\frac{ix}{2\sqrt{t}}\Big)^2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$
以上より $n=1$ のときに示された。

$m=0,1,\dots,\infty$ に対して、
$$C_0^m(\mathbb{R}^n) = \{f | f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \text{ は } C^m \text{ 級}, \lim_{|x|\to\infty} f(x)=0\}$$
ただし $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$ の厳密な定義は $\lim_{r\to\infty}\sup_{|x|\geq r}|f(x)|=0$ である。

補題 6.3.2. (1) $f\in L^1$ ならば $\mathcal{F}f \in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty$ で $||\mathcal{F}f||_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}||f||_1$.
(2) $f\in C_0^1\cap L^1$ かつ $\frac{\partial f}{\partial x_k}\in L^1$ ならば
$$\mathcal{F}(\frac{\partial f}{\partial x_k}) = ix_k\mathcal{F}f \tag{6.3.3}$$
(3) $f\in L^1$ かつ $x_kf\in L^1$ ならば $\mathcal{F}f$ は任意の x で x_k-偏微分可能であり、
$$\mathcal{F}(x_kf) = i\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{F}f \tag{6.3.4}$$
(4) $f,g\in L^1$ とするとき、
$$\mathcal{F}(f*g) = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g \tag{6.3.5}$$

証明. (1) (6.3.1) より任意の $x\in\mathbb{R}^n$ で $|(\mathcal{F}f)(x)|\leq(2\pi)^{-n/2}||f||_1$ は明らか。いま $m\to\infty$ で $x_m\to x$ とする。このとき $f(y)e^{-ix_my}\to f(y)e^{-ixy}$ であり、$|f(y)e^{-ix_my}|\leq|f(y)|$. よって Lebesgue の収束定理（定理 2.4.3）を用いれば $m\to\infty$ で $(\mathcal{F}f)(x_m)\to(\mathcal{F}f)(x)$. 従って $\mathcal{F}f$ は連続である。
(2) $k=1$ として一般性を失わない。$g=\frac{\partial f}{\partial x_1}$ とおくとき
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)x_1e^{-xy}dy_1 = i\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{\partial e^{-ixy}}{\partial y_1}dy_1 = -i\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-ixy}dy_1$$
である。これを $y_2,\dots,y_n$ に関して積分すれば
$$x_1\mathcal{F}f = -i\mathcal{F}(\frac{\partial f}{\partial x_1}).$$

(3) $k=1$ として一般性を失わない。$\mathcal{F}f$ を $x_2,\dots,x_n$ を固定して x_1 の関数と考えたものを $F(x_1)$ と書く。このとき

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{h}=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)e^{-ixy}\frac{e^{-ihy_1}-1}{h}dy \tag{6.3.6}$$

任意の $\theta\in\mathbb{R}$ に対して $|e^{-i\theta}-1|\leq|\theta|$ であるので、$|f(y)e^{-ixy}(e^{-hy_1}-1)/h|\leq|y_1f(y)|$. $x_1f\in L^1$ であるので Lebesgue の収束定理 (定理 2.4.3 により (6.3.6) で $h\to 0$ とすれば、(6.3.4) が得られる。

(4) $f(y)g(y-z)e^{-ixz}$ は $dydz$-可積分であるので Fubini の定理により、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\int f(y)g(z-y)e^{-ixz}dydz\\&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\int(f(y)e^{-ixy})(g(z-y)e^{-ix(z-y)}dzdy\\&=(2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x)\end{aligned}$$

□

定理 6.3.3. $f\in L^1$ ならば $\mathcal{F}f\in C_0\cap L^\infty$ で $||\mathcal{F}f||_\infty\leq(2\pi)^{-n/2}||f||_1$. 特に

$$\lim_{|x|\to\infty}(\mathcal{F}f)(x)=0 \tag{6.3.7}$$

(6.3.7) の事実は Riemann-Lebesgue の補題と呼ばれる。

証明. (6.3.7) 2 つの Step に分けておこなう。
Step 1: $f\in C_c^\infty$ のとき
補題 6.3.2-(2) より $f\in C_c^\infty$ に対して、

$$\mathcal{F}(\Delta f)=-|x|^2\mathcal{F}f$$

だたし $\Delta f=\frac{\partial^2f}{\partial {x_1}^2}+\cdots+\frac{\partial^2f}{\partial {x_n}^2}$. 従って、補題 6.3.2-(1) より

$$|(\mathcal{F}f)(x)|\leq(2\pi)^{-n/2}|x|^{-2}||\Delta f||_1$$

これより (6.3.7) が成立する。
Step 2: 一般の $f\in L^1$ のとき
系 6.2.7 より C_c^∞ は L^1 で稠密であるから、任意の $\epsilon>0$ に対して $g\in C_c^\infty$ を $||g-f||_1\leq\epsilon/2$ をみたすように選べる。いま、

$$|(\mathcal{F}f)(x)|\leq|(\mathcal{F}g)(x)|+||f-g||_1$$

$|x|$ が十分大きいならば、Step 1 より $|(\mathcal{F}g)(x)|<\epsilon/2$. このとき $|(\mathcal{F}f)(x)|<\epsilon$. 以上より (6.3.7) が示された。 □

§6.4 逆 Fourier 変換

$\mathcal{F}$ の定義と同様に、$f \in L^1$ に対して、

$$(\mathcal{G}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ixy} dy$$

と定義する。明らかに $(\mathcal{G}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$ である。よって補題 6.3.2 および定理 6.3.3 と同様の証明で次のことが示される。

補題 6.4.1. (1) $f \in L^1$ ならば $\mathcal{G}f \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty$ で $||\mathcal{G}f||_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} ||f||_1$.
(2) $f \in C_0^1 \cap L^1$ かつ $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1$ ならば

$$\mathcal{G}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = -ix_k \mathcal{G}f \tag{6.4.1}$$

(3) $f \in L^1$ かつ $x_k f \in L^1$ ならば $\mathcal{G}f$ は任意の x で x_k-偏微分可能であり、

$$\mathcal{G}(x_k f) = -i \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{G}f \tag{6.4.2}$$

(4) $f, g \in L^1$ ならば

$$\mathcal{G}(f * g) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{G}f \cdot \mathcal{G}g \tag{6.4.3}$$

定理 6.4.2. $f \in L^1$ かつ $\widehat{f} \in L^1$ ならば $f \in C_0$ であり、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で $(\mathcal{G}(\mathcal{F}f))(x) = f(x)$ かつ $(\mathcal{F}(\mathcal{G}f))(x) = f(x)$ が成り立つ。

注意. 定理 6.4.2 を厳密に言い直せば、「$f \in \mathcal{L}^1$ か t $f \in \mathcal{L}^1$ ならば、ある $f_* \in C_0$ に対して $f^*(x) = f(x)$ が μ_n-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で成り立ち、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\mathcal{G}(\mathcal{F}f_*))(x) = f(x)$ かつ $(\mathcal{F}(\mathcal{G}f_*))(x) = f(x)$」である。

　定理 6.4.2 より $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ は互いに逆写像の関係になっていることがわかる。この意味で $\mathcal{G}$ を逆 Fourier 変換と呼び $\mathcal{F}^{-1}$ と書く。
　定理 6.4.2 の証明のためには次の補題が必要になる。

補題 6.4.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$p \in [1, \infty]$, $f, f_1, f_2, \ldots \in L^p(X, \mu)$ であり、$m \to \infty$ で $||f_m - f||_p \to 0$ とする。このとき $\{f_m\}_{m \geq 1}$ の部分列で、μ-*a.e.* $x \in X$ において $m \to \infty$ で各点収束するものが存在する。

証明. $p=\infty$ のときは明らか。$p\in[1,\infty)$ とする。いま

$$2^{-m}\mu(\{x||f_k(x)-f(x)|\geq 2^{-m})^{1/p}\leq ||f-f_k||_p$$

$k\to\infty$ で上の式の右辺は 0 に収束する。従って $\{f_k\}_{k\geq 1}$ の部分列 $\{g_m\}_{m\geq 1}$ で任意の m に対して $A_m=\{x||g_m(x)-f(x)|\geq 2^{-m}\}$ とおくと $\mu(A_m)\leq 2^{-m}$ が成り立つものがとれる。このとき

$$\mu(\limsup_{m\to\infty} A_m)\leq \mu(\cup_{m\geq k}A_m)\leq \sum_{m\geq k}2^{-m}\leq 2^{-k+1}.$$

$k\to\infty$ とすれば $\mu(\limsup_{m\to\infty}A_m)=0$. 従って μ-a.e. $x\in X$ で $x\in\liminf_{m\to\infty}(A_m)^c$. すなわち μ-a.e. $x\in X$ で m が十分大きいならば $|g_m(x)-g(x)|<2^{-m}$ が成り立つ。つまり μ-a.e. $x\in X$ で $\lim_{m\to\infty}g_m(x)=g(x)$. □

定理 *6.4.2* の証明. いま $t>0$ に対して

$$f_t(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\int f(z)e^{-iyz}e^{ixy}e^{-t|y|^2}dydz \tag{6.4.4}$$

とおく。(6.4.4) の右辺の積分の被積分関数の絶対値は $|f(z)e^{-t|y|^2}|$ でありこれは $\mathbb{R}^{2n}$ の関数として可積分であるので、Fubini の定理より

$$f_t(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \widehat{f}(y)e^{ixy}e^{-t|y|^2}dy$$

ここで $|\widehat{f}(y)e^{ixy}e^{-t|y|^2}|\leq|\widehat{f}(y)|$ であり $\widehat{f}\in L^1$. Lebesgue の収束定理（定理 2.4.3）により任意の $x\in\mathbb{R}^n$ で

$$\lim_{t\to 0}f_t(x)=(\mathcal{G}(\mathcal{F}f))(x). \tag{6.4.5}$$

一方 $g(x)=e^{-t|x|^2}, k_t(x)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/(4t)}$ とおくと (6.4.4) に Fubini の定理と例 6.3.1 を用いて

$$f_t(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int f(z)\widehat{g}(z-x)dz=\int f(z)k_t(x-z)dz=(f*k_t)(x)$$

いま $\varphi(x)=(\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2}$, $\varphi_s(x)=s^{-n}\varphi(x/s)$ とおくとき、$k_t(x)=\varphi_{2\sqrt{t}}$ である。例 6.2.5 により φ は 定理 6.2.4 の条件をみたす。従って定理 6.2.4 により、$f_t=f*k_t$ は $t\downarrow 0$ で f に L^1 の意味で収束する。補題 6.4.3 により f_t の部分列は f に a.e.$x\in\mathbb{R}^n$ で各点収束する。これと (6.4.5) により a.e. $x\in\mathbb{R}^n$ で $(\mathcal{G}(\mathcal{F}f))(x)=f(x)$. いま $(\mathcal{G}(\mathcal{F}f))\in C_0$ より、$f\in C_0$ と考えてよい。$(\mathcal{F}(\mathcal{G}f))=f$ についても同様に示される。 □

系 6.4.4. $f, g \in L^1$ かつ $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g \in L^1$ とする。このとき、$\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}f * \mathcal{F}g$ かつ $\mathcal{G}(f \cdot g) = (2\pi)^{-n/2}\mathcal{G}f * \mathcal{G}g$.

注意. $f, g \in L^1$ かつ $\mathcal{F}f \in L^1$ ならば定理 6.4.2 より $f \in C_0 \subset L^\infty$. 従って $f \cdot g \in L^1$.

証明. $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$ より補題 6.4.1-(4), 定理 6.4.2 より、$\mathcal{G}(\widehat{f} * \widehat{g}) = (2\pi)^{n/2} f \cdot g$. いま $f \cdot g \in L^1$ であるから、再び定理 6.4.2 より $\widehat{f} * \widehat{g} = \mathcal{F}(\mathcal{G}(\widehat{f} * \widehat{g})) = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(f \cdot g)$. □

系 6.4.5. $f, g \in L^1$ かつ $\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \in L^1$ ならば、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x)dx. \tag{6.4.6}$$

とくに、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(x)\overline{(\mathcal{F}g)(x)}dx. \tag{6.4.7}$$

証明. $\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \in L^1$ なので定理 6.4.2 により、

$$f * g = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f * g)) = \mathcal{G}((2\pi)^{n/2}\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)$$

この式に $x = 0$ を代入すれば (6.4.6) が得られる。いま $g^*(x) = \overline{g(-x)}$ とおくと $\mathcal{F}(g^*) = \overline{\mathcal{F}g}$. よって (6.4.6) で g の代わりに g^* を代入すれば (6.4.7) が得られる。 □

§6.5 Schwartz 空間上での Fourier 変換

補題 6.5.1. $f \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n$ とするとき、

$$x^\beta D^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha f))$$
$$x^\beta D^\alpha(\mathcal{G}f) = i^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{G}(D^\beta(x^\alpha f))$$

証明. $f \in \mathcal{S}$ ならば任意の $\alpha, \beta(\mathbb{N}_*)^n$ に対して $x^\alpha f \in \mathcal{S}, D^\beta f \in \mathcal{S}$. よって補題 6.3.2 および 6.4.1 を用いれば明らか。 □

定理 6.5.2. $\mathcal{F}$ および $\mathcal{G}$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ の全単射であり、$\mathcal{G}\circ\mathcal{F} = \mathcal{F}\circ\mathcal{G} = \mathrm{I}_{\mathcal{S}}$. ただし $\mathrm{I}_{\mathcal{S}}$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への恒等写像である。さらに $(\cdot, \cdot)$ を L^2 の内積とするとき、任意の $f, g \in \mathcal{S}$ に対して $(f, g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$ が成り立つ。

証明. $f \in \mathcal{S}$ とする。$\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して $D^\beta(x^\alpha f) \in \mathcal{S} \subseteq L^1$ である。補題 6.5.1 および定理 6.3.3 より $x^\beta D^\alpha(\mathcal{F}f) \in C_0$. 従って、$|\mathcal{F}f|_{\alpha,\beta} < +\infty$. よって $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$ が成り立つ。同様に $\mathcal{G}f \in \mathcal{S}$. 従って $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{G}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$. 定理 6.4.2 により $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = I_{\mathcal{S}}$. とくに $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への全単射である。$f, g \in \mathcal{S}$ のとき、$\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \in L^1$. 従って (6.4.7) より $(f,g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$. □

定理 6.5.3. $(V, ||\cdot||_V), (U, ||\cdot||_U)$ をノルム空間とする。線型写像 $f : V \to U$ に対して、次の 3 つの条件は同値である。
(1) f は V 上連続である。
(2) f は 0 で連続である。
(3) f は有界である。すなわちある $c > 0$ があって任意の $v \in V$ に対して $||f(v)||_U \leq c||v||_V$.

定理 6.5.4. $(V, ||\cdot||_V)$ をノルム空間, $(U, ||\cdot||_U)$ を *Banach* 空間とする。さらに W を V の稠密な部分空間とする。いま有界線型写像 $f : W \to U$ に対して有界線型写像 $F : V \to U$ で $F|_W = f$ をみたすものがただ一つ存在する。さらに $\sup_{v \in V \setminus \{0\}} ||F(v)||_U / ||v||_V = \sup_{v \in W \setminus \{0\}} ||F(v)||_U / ||v||_V$ が成り立つ。

定理 6.5.5. $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$ は L^2 から L^2 への内積を保つ線形な全単射（*i.e. Unitary map*）に一意的に拡張できる。その拡張を $\widetilde{\mathcal{F}}$ とするとき、$f \in L^1 \cap L^2$ ならば $\mathcal{F}f = \widetilde{\mathcal{F}}f$ である。とくに $f \in L^1 \cap L^2$ ならば $\mathcal{F}f \in L^2$ であり、

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}f)(x)|^2 dx \tag{6.5.1}$$

(6.5.1) を Plancherel の公式という。

以後混乱を生じないときは $\widetilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ と書き、L^2 上の Fourier 変換という。さらにこの意味での $\mathcal{F}$ の逆写像を $\mathcal{F}^{-1}$ と書き、L^2 上の逆 Fourier 変換という。

証明. $\mathcal{F}$ が L^2 から L^2 への内積を保つ線形写像に拡張できることは、定理 6.5.2 と定理 6.5.4 より明らか。同様に $\mathcal{G}$ も L^2 から L^2 への内積を保つ線形写像に拡張され、その拡張が $\widetilde{\mathcal{F}}$ の逆を与えることも明らかなので、$\widetilde{\mathcal{F}}$ が全単射である。

$f \in L^1 \cap L^2$ とする。$r > 0$ に対して $f_r = f \cdot \chi_{B_r(x)}$ とする。このとき $n \geq 1$ に対して r が十分大きいならば $||f - f_r||_1 < 1/n, ||f - f_r||_2 < 1/n$ である。さらに例 6.2.4 で φ として台コンパクトなものを選んでおくと $f_r * \varphi_s \in C_c^\infty$ であり $s \downarrow 0$ で $||f_r - f_r * \varphi_s||_1 \to 0$ かつ $||f_r - f_r * \varphi_s||_2 \to 0$. 従って、$g_n \in C_c^\infty$ で $||f_r - g_n||_1 \leq 1/n$ かつ $||f_r - g_n||_2 \leq 1/n$ となるものがとれる。以上より、$\{g_n\}_{n \geq 1} \subseteq C_c^\infty$ で $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_1 = \lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_2 = 0$ と

なるものがある。いま、補題 6.3.2-(1) により、$||\mathcal{F}f-\mathcal{F}g_n||_\infty \leq ||f-g_n||_1$. 従って $\mathcal{F}g_n$ は $n\to\infty$ で $\mathcal{F}f$ に一様収束する。一方 $\mathcal{F}g_n$ は $\widetilde{\mathcal{F}}f$ に L^2 で収束する。補題 6.4.3 より $\mathcal{F}g_n$ の部分列で $\widetilde{\mathcal{F}}f$ に a.e.$x\in\mathbb{R}^n$ で各点収束するものがとれる。いま 任意の x で $n\to\infty$ のとき $(\mathcal{F}g_n)(x)\to(\mathcal{F}f)(x)$ であるから $(\widetilde{\mathcal{F}}f)(x)=(\mathcal{F}f)(x)$ が a.e.$x\in\mathbb{R}^n$ で成立する。従って L^2 の要素として $\mathcal{F}f=\widetilde{\mathcal{F}}f$. □

§6.6　Fourier 変換と微分方程式

$\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$\sum_{j=1}^m a_j D^{\alpha_j}u=f$$

が成り立つとき、両辺を Fourier 変換すると、

$$P(x)\widehat{u}(x)=\widehat{f}(x),$$

(ただし $P(x)=a_1i^{\alpha_1}x^{a_1}+\ldots+a_mi^{\alpha_m}x^{\alpha_m}$) と書ける。従って、$Q=\mathcal{F}^{-1}(1/P)$ とおくと

$$u(x)=(2\pi)^{-n/2}(Q*f)(x)$$

が成り立つはずである。とりあえず $n=1$ のときいくつかの例についてこの議論を検証する。

A. Laplacian の場合

$f\in\mathcal{S}$ とする。$\Delta=d^2/dx^2$ と定義する。すなわち $u\in C^2$ に対して $(\Delta u)(x)=u''(x)$ である。いま $f\in\mathcal{S}$ に対して、

$$\Delta u=f$$

をみたす u を考える。Fourier 変換により

$$-x^2(\mathcal{F}u)(x)=(\mathcal{F}f)(x)$$

となるが、x^-2 は（逆）Fourier 変換ができないので上の方法では解けない。代わりに $\lambda>0$ に対して、

$$-\Delta u+\lambda u=f \tag{6.6.1}$$

を考える。Fourier 変換により

$$(\lambda + x^2)(\mathcal{F}u)(x) = (\mathcal{F}f)(x)$$

ここで $\mathcal{F}^{-1}(\lambda+x^2)^{-1} = \sqrt{\pi/(2\lambda)}e^{-\sqrt{\lambda}|x|} \in L^1$ より、$g_\lambda(x) = (2\sqrt{\lambda})^{-1}e^{-\sqrt{\lambda}|x|}$ とおけば、

$$u(x) = (g_\lambda * f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}f(y)dy \tag{6.6.2}$$

となる。以上をまとめると、

定理 6.6.1. あたえられた $f \in \mathcal{S}$ に対して微分方程式 (6.6.1) をみたす u で $u \in \mathcal{S}$ となるものがただ一つ存在し、(6.6.2) で与えられる。

いま $\lambda > 0$ に対して $G_\lambda f = f * g_\lambda$ と定義する。$p \in [1,\infty)$ に対して $||f * g_\lambda||_p \leq ||g_\lambda||_1||f||_p = \lambda^{-1}||f||_p$ より $G_\lambda : L^p \to L^p$ は

$$||G_\lambda f||_p \leq \frac{1}{\lambda}||f||_p$$

をみたす有界線型作用素である。ここで $G_\lambda = (\lambda - \Delta)^{-1}$ となっている。$\{G_\lambda\}_{\lambda>0}$ は Δ の resolevent、g_λ は Δ の λ-Green 関数とよばれる。

B. 熱（拡散）方程式

$u : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ 上で C^∞ 級とする。さらに $t \geq 0$ に対して $u_t(x) = u(t,x)$ とおくとき、任意の $t \geq 0$ で $u_t \in \mathcal{S}$ とする。いま u が熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.6.3}$$

を任意の $t > 0, x \in \mathbb{R}$ で満たすとする。(6.6.3) を x に関して Fourier 変換すると、

$$(\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t}))(x) = (\mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}))(x) = -x^2(\mathcal{F}u)(x)$$

$\mathcal{F}$ と $\partial/\partial t$ が交換可能であると仮定し $U(t,x) = (\mathcal{F}u)(t,x)$ とおけば

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = -x^2U(t,x).$$

これを解いて

$$U(t,x) = e^{-tx^2}U(0,x) = e^{-tx^2}(\mathcal{F}u_0)(x)$$

となる。$e^{-tx^2} \in \mathcal{S}$ より逆 Fourier 変換をおこなえば、

$$u(t,x) = (u_0 * k_t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy$$

($k_t(x)$ は定理 6.4.2 の証明で与えたもの)

C. 波動方程式

$u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ 上で C^∞ 級であり、$f, g \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.6.4}$$

$$u(0,x) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$$

をみたすとする。(6.6.4) を波動方程式という。いま (6.6.4) を x に関して Fourier 変換し、$\mathcal{F}$ と $\partial^2/\partial t^2$ が交換可能であると仮定すれば

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F} u}{\partial t^2}(t,x) = -x^2 (\mathcal{F} u)(t,x)$$

$U(t,x) = (\mathcal{F} u)(t,x)$ とおいてこの t に関する常微分方程式を解けば、

$$U(t,x) = \widehat{f}(x) \cos xt + \widehat{g}(x) \frac{\sin xt}{x}$$

$\cos xt, \sin xt/x$ はともに（逆）Fourier 変換可能ではないがとりあえず考察を続ける。いま δ_a を $a \in \mathbb{R}$ に重みをもつ δ-関数とする。数学的には δ_a は $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度で、$\delta_a(A) = \chi_A(a)$ をみたすのものである。さて、

$$(\mathcal{F}(\delta_t + \delta_{-t}))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixy} (d\delta_t(y) + d\delta_{-t}(y)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cos xt$$

$$(\mathcal{F} \chi_{[-t,t]})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-ixy} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin xt}{x}$$

従って

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(\cos xt) = \frac{\delta_t + \delta_{-t}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(\sin xt/x) = \frac{1}{2} \chi_{[-t,t]}$$

これより、

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= (f * (\frac{\delta_t + \delta_{-t}}{2}))(x) + \frac{1}{2}(g * \chi_{[-t,t]})(x) \\
&= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} g(x+s)ds.
\end{aligned}
$$

以上の議論を正当化するためには超関数の理論が必要になる。

Chapter 7

超関数

§7.1 Tempered distributions

定義 7.1.1. $N \geq 1$ とする。$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$|u|_N = \sum_{\alpha,\beta \in (\mathbb{N}_*)^n : |\alpha|,|\beta| \leq N} |u|_{\alpha,\beta}$$

とおく。

命題 7.1.2. 任意の $N \geq 1$ に対して $|\cdot|_N$ は $\mathcal{S}$ 上の *norm* である。

定義 7.1.3. 線型写像 $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ に対してある $N \geq 1$ とある $c > 0$ があって任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して

$$|f(u)| \leq c|u|_N \tag{7.1.1}$$

が成り立つとき、f を tempered distribution（緩増大な超関数）という。tempered distribution の全体を $\mathcal{S}'$ で表す。

$f \in \mathcal{S}', u \in \mathcal{S}$ に対して $f(u)$ を $\langle f, u \rangle$ と表す。

命題 7.1.4. $\mathcal{S}'$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間である。

命題 7.1.5. (1) $p \in [1,\infty], N \in \mathbb{N}_*$ に対して

$$L^p_N = \{f | \frac{f(x)}{1+|x|^N} \in L^p\}$$

とする。$f \in L^p_N$ に対して $\phi_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$ と定義すると、$\phi_f \in \mathcal{S}'$ である。

(2) $p, q \in [1,\infty], N, M \in \mathbb{N}_*, f \in L^p_N, g \in L^q_M$ とする。*tempered distribution* として $\phi_f = \phi_g$ ならば *a.e.* $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(x) = g(x)$ である。

上の命題より $f \in \cup_{p\in[1,\infty],N\in\mathbb{N}_*} L^p_N$ に $\phi_f \in \mathcal{S}$ を対応させる写像は単射であることがわかる。以後、この意味で $\cup_{p\in[1,\infty],N\in\mathbb{N}*} L^p_N$ を $\mathcal{S}'$ の部分集合と考え、ϕ_f を f と同一視する。

補題 7.1.6. $p \in [1,\infty], N \in \mathbb{N}_*$ とする。このときある $c_{n,p,N} > 0$ があって任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、$u_N(x) = |x|^N u(x)$ と定義すると

$$||u_N||_p \le c_{n,p}|u|_{n+N+1}$$

が成り立つ。

証明. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $|x|_* = \sum_{j=1}^n |x_j|$ とする。$|x|_* \ge |x|$ に注意すると $u \in \mathcal{S}$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^{n+1})|x|^N|u(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|x|_*^N + |x|_*^{n+N+1})|u(x)| \le c|u|_{n+N+1}$$

（ただし c は n, N にのみ依存する定数）よって

$$|x|^N|u(x)| \le c\frac{|u|_{n+N+1}}{1+|x|^{n+1}}$$

いま $(1+|x|^{n+1})^{-1} \in L^p$ なので補題が示される。 □

補題 7.1.7. 任意の $0 < r < R < \infty$ に対して、$\psi \in C_c^\infty$ で $|x| \le r$ ならば $\psi(x) = 1$, $|x| \ge R$ ならば $\psi(x) = 0$, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で $0 \le \psi(x) \le 1$ を満たすものが存在する。

命題 7.1.4 の証明. (1) q を $1/p+1/q = 1$ となるように選ぶ。$f \in L^p_N, u \in \mathcal{S}$ に対して、$f'(x) = f(x)/(1+|x|^N), u_N(x) = |x|^N u(x)$ とおくと Hölder の不等式および補題 7.1.6 より

$$\begin{aligned}|\phi_f(u)| &\le \int \frac{|f(x)|}{1+|x|^N}(1+|x|^N)|u(x)|dx \le ||f'||_p(||u||_q + ||u_N||_q) \\ &\le (c_{n,0,q} + c_{n,N,q})||f'||_p|u|_{n+N+1}\end{aligned}$$

従って $\phi_f \in \mathcal{S}'$.
(2) $p, q \in [1,\infty), N = M = 0$ の場合：定理 6.2.4 の φ_s をとり、$x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\varphi_{s,x}(y) = \varphi_s(x-y)$ と定義する。$\varphi_{s,x} \in \mathcal{S}$ なので $(f*\varphi_s)(x) = \phi_f(\varphi_{s,x}) = \phi_g(\varphi_{s,x}) = (g*\varphi_s)(x)$. 従って $f*\varphi_s = g*\varphi_s$. $h_n = f*\varphi_{1/n}$ とおけば定理 6.2.4 より $\lim_{n\to\infty}||f-h_n||_p = \lim_{n\to\infty}||g-h_n||_q = 0$. 補題 6.4.3

により $\{h_{n_j}\}_{j\geq 1}$ で a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{j\to\infty} h_{n_j}(x) = f(x) = g(x)$ となるものがとれる。よって a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $f(x) = g(x)$.
一般の場合：補題 7.1.7 で $r = N, R = 2N$ としたものを ψ_N とし $f_N = f\psi_N, g_N = g\psi_N$ とする。このときある $p', q' \in [1,\infty)$ で $f_N \in L^{p'}, g_N \in L^{q'}$ である。いま $\phi_{f_N}(u) = \phi_f(\psi_N u) = \phi_g(\psi_N u) = \phi_{g_N}(u)$. よって上の議論から $f_N(x) = g_N(x)$ が a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で成立する。$|x| \leq N$ では $f_N(x) = f(x), g_N(x) = g(x)$ であるので a. e. $x \in B_N(0)$ で $f(x) = g(x)$. N は任意なので a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $f(x) = g(x)$. □

命題 7.1.8. μ を $\mathbb{R}^n$ 上の *Borel* 正則な測度で、ある $N \in \mathbb{N}$ に対して、$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^N)^{-1}d\mu < +\infty$ とする。このとき、$u \in \mathcal{S}$ に対して、$\phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u d\mu$ と定義すれば $\phi_\mu \in \mathcal{S}'$ である。

証明. $\phi_\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ で線型であることは明らか。いま、$|x| \leq |x|_*$ より $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^N)|f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+(|x|_*)^N) \leq c|f|_N$ （ただし c は f によらない定数）これより、

$$|\phi_\mu(u)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^N)u(x)(1+|x|^N)^{-1}d\mu\right| \leq c|u|_N\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^N)^{-1}d\mu.$$

□

$a \in \mathbb{R}^n$ に対して δ_a を a に重みを持つ Dirac の δ-関数（測度）とすると、$\phi_{\delta_a}(u) = u(a)$ となる。δ_a と ϕ_{δ_a} を同一視して $\delta_a(u) = u(a)$ と考える。

定理 7.1.9.

$$L^1_{PG} = \{f | f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \text{ある } g \in L^1 \text{ とある } N \in \mathbb{N}_* \text{ に対して } f(x) = (1+|x|^N)g(x) \text{ が任意の } x \in \mathbb{R}^n \text{ で成立}\}$$

と定義する。
(1) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\phi_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx$ と定義するとき $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ である。さらに $f, g \in L^1_{PG}$ に対して *tempered distribution* として $\phi_f = \phi_g$ ならば *a.e.* $x \in \mathbb{R}^n$ で $f(x) = g(x)$ である。
(2)

$$L^1_{PG} = \{f | f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \text{ は可測でありある } N \in \mathbb{N}_*, c > 0 \text{ に対して } \int_{B_r(0)} |f(x)|dx \leq c(1+r^N) \text{ が任意の } r \geq 0 \text{ で成立する。}\}$$

(3) $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ を可測とする。任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して fu は $\mathbb{R}^n$ 上可積分であり $\phi_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx$ と定義するとき $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ となるための必要十分条件は $f \in L^1_{PG}$ である。

L^1_{PG} の PG は polynominal growth の略である。$f \in L^p_N$ のとき $1/p + 1/q = 1$ となる q をとりさらに M を $(1+|x|^M)^{-1} \in L^q$ となるように選べば Hölder の不等式より

$$\int \frac{|f(x)|}{1+|x|^N} \frac{1}{1+|x|^M} dx < \infty.$$

よって $\int (1+|x|^{NM})^{-1}|f(x)|dx < \infty$. 従って $f \in L^1_{PG}$ である。つまり任意の $N \in \mathbb{N}_*$、任意の $p \in [1,\infty]$ に対して $L^p_N \subseteq L^1_{PG}$ である。さらに L^1_{PG} がベクトル空間となることも明らかである。

この定理の証明のため、

$$\mathcal{L}_{PG} = \{f | f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \text{ は可測でありある } N \in \mathbb{N}_*, c > 0 \text{ に対して}$$
$$\int_{B_r(0)} |f(x)|dx \le c(1+r^N) \text{ が任意の } r \ge 0 \text{ で成立する。}\}$$

とおく。

補題 7.1.10. $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ は可測とする。任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して fu は $\mathbb{R}^n$ 上可積分であり $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき $f \in \mathcal{L}_{PG}$ である。

証明. 簡単のため $n = 1$ の場合で証明する。補題 7.1.7 の ψ で $r = 1, R = 2$ としたものを選ぶ。ここで $a \ge 1$ に対して

$$\psi_a(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le a-1) \\ \psi(|x| - a + 1) & (|x| \ge a-1) \end{cases}$$

とおくとき $\psi_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. いま $|x| \ge a+1$ で $\psi_a^{(n)}(x) = 0$ であり $||\psi_a^{(n)}||_\infty \le ||\psi^{(n)}||_\infty$ である。従って $|\psi_a|_{m,k} \le (a+1)^k ||\psi^{(m)}||_\infty$. いま $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ なのである $N \in \mathbb{N}_*, c > 0$ があって、$|\phi_f(u)| \le c|u|_N$. $f(x) \ge 0, \psi_a(x) \ge 0$ より、

$$\int_{-a}^a f(x)dx \le \int f(x)u(x)dx \le c|\psi_a|_N \le c'(a+1)^N \le c''(1+a^N)$$

が成立する。よって $f \in \mathcal{L}_{PG}$. □

定理 *7.1.9* の証明. (1) は命題 7.1.4 より明らか。
(2) $f \in L^1_{PG}$ とするとき $|f| \in L^1_{PG}$. $|f|$ に補題 7.1.10 を使えば $f \in \mathcal{L}^1_{PG}$.

逆に $\int_{B_r(0)}|f(x)|dx \le c(1+r^N)$ とする。このとき Hölder の不等式により

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|}{1+|x|^{N+2}}\chi_{B_m(0)}dx = \sum_{k=0}^{m-1}\int_{k\le|x|\le k+1}\frac{|f(x)|}{1+|x|^{N+2}}dx$$
$$\le \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{1+k^{N+2}}\int_{k\le|x|\le k+1}|f(x)|dx \le c\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1+(k+1)^N}{1+k^{N+2}}$$

いまある $c_1>0$ に対して $k\ge 1$ では $(1+(k+1)^N)/(1+k^{N+2}) \le c_1/k^2$ であるので、上の式の最後の和は $m\to\infty$ で収束する。単調収束定理より $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|/(1+|x|^{N+2})dx < \infty$. よって $f\in L^1_{PG}$.
(3) 補題 7.1.10 より $\phi_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ならば $f\in\mathcal{L}_{PG}=L^1_{PG}$. 逆に (1) より $f\in L^1_{PG}$ ならば $\phi_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

§7.2 超関数の演算

命題 7.2.1. $f\in L^\infty\cap C^1$ かつ $p\in[1,\infty]$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x_k}\in L^p$ とする。このとき任意の $u\in\mathcal{S}$ に対して、

$$\phi_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(u) = -\phi_f(\frac{\partial f}{\partial x_k}).$$

証明. $n=2,\ k=1$ の場合を証明する。いま $u\in\mathcal{S}$ に対して、

$$|u(x_1,x_2)| \le \frac{|u|_2}{1+|x_1|+|x_2|^2} \le \frac{|u|_2}{1+|x_2|^2}$$

いま $T>0$ に対して部分積分を行えば

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{-T}^{T}\frac{\partial f}{\partial x_1}udx_1\Big)dx_2 =$$
$$\int_{\mathbb{R}}(f(T,x_2)u(T,x_2)-f(-T,x_2)u(-T,x_2))dx_2 - \int_{\mathbb{R}}\int_{-T}^{T}f\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1dx_2 \tag{7.2.1}$$

いま

$$|\int_{\mathbb{R}}f(T,x_2)u(T,x_2)dx_2| \le ||f||_\infty|u|_2\int_{\mathbb{R}}\frac{dx_2}{1+T+|x_2|^2}$$

$T \to \infty$ とするとき Lebesgue の収束定理より上の式の右辺は 0 に収束する。よって $\int_{\mathbb{R}} f(-T, x_2)u(-T, x_2)dx_2$ についても同様に $T \to \infty$ で 0 に収束することがわかる。よって (7.2.1) で $T \to \infty$ とすれば

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x_1} u dx = -\int_{\mathbb{R}^2} f \frac{\partial u}{\partial x_1} dx.$$

□

命題 7.2.2. $f \in \mathcal{S}'$ とする。$u \in \mathcal{S}$ に対して

$$f_j(u) = -f(\frac{\partial u}{\partial x_j})$$

と定義すると、 $f_j \in \mathcal{S}'$ である。f_j を f の超関数の意味での x_j-偏微分といい、$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ と書く。

命題 7.2.2 の仮定をみたすような f に関しては通常の偏微分と超関数の意味での偏微分は一致する。

証明. $f \in \mathcal{S}'$ よりある $c > 0$ とある $N \geq 0$ があって $|f(u)| \leq c|u|_N$. 従って

$$|f_j(u)| \leq c|\frac{\partial u}{\partial x_j}| \leq c|u|_{N+1}$$

□

定義 7.2.3. $f \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$D^\alpha f = \big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big)^{\alpha_1} \cdots \big(\frac{\partial}{\partial x_n}\big)^{\alpha_n} f$$

と定義する。

$f \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$, $u \in \mathcal{S}$ に対して

$$(D^\alpha f)(u) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha u)$$

が成り立つ。

例 7.2.4. (1) $n=1$ とする。$a \in \mathbb{R}$ のとき

$$H_a(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ 1 & (a \leq x) \end{cases}$$

と定義する。H_a を Heaviside 関数という。$u \in \mathcal{S}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} H_a(x) u'(x) dx = -u(a) = -\delta_a(u)$$

従って H_a の超関数の意味の微分は δ_a である。
(2) $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$, $u \in \mathcal{S}$ に対して

$$(D^\alpha \delta_a)(u) = (-1)^{|\alpha|} \delta_a(D^\alpha u) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha u)(a)$$

命題 7.2.5. $f \in L^1_{PG} \cap C^1$ とする。f の（従来の意味の）x_k-偏導関数を f_k と書くことにする。いま $f_k \in L^1_{PG}$ ならば f の超関数の意味での x_k-偏微分は f_k と一致する。

補題 7.2.6. φ を定理 *6.2.4* の条件をみたす関数とする。すなわち $\varphi \in \mathcal{S}$ であり任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\varphi(x) \geq 0$ かつ $\int \varphi(x) dx = 1$ とする。$\varphi_s(x) = s^{-n}\varphi(x/s)$ とおくとき、任意の $N \in \mathbb{N}_*$ と任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して $s \downarrow 0$ で $|u * \varphi_s - u|_N \to 0$ が成り立つ。

証明. Step 1: $\psi_s(x) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}\varphi)(sx) = \int \varphi(y) e^{-isxy} dy$ とおく。$\gamma \in (\mathbb{N}_*)^n$ で $|\gamma| \geq 1$ ならば $h \in \mathcal{S}$ に対して、$\lim_{s\downarrow 0} ||hD^\gamma \psi_s||_1 = 0$ である。
Step 1 の証明: $D^\gamma \psi_s(x) = (-i)^{|\gamma|} s^{|\gamma|} \int y^\gamma \varphi(y) e^{-isxy} dy$. いま $\varphi \in \mathcal{S}$ より $\Phi(y) = y^\gamma \varphi(y)$ とおくと $\Phi \in \mathcal{S}$. 従って $||D^\gamma \psi_s||_\infty = (2\pi)^{n/2} s^{|\gamma|} ||\mathcal{F}\Phi||_\infty \leq s^{|\gamma|}||\Phi||_1$. Hölder の不等式より

$$||hD^\gamma \psi_s||_1 \leq ||h||_1 ||D^\gamma \psi_s||_\infty \leq s^{|\gamma|} ||h||_1 ||\Phi||_1$$

これより Step 1 は明らか。
Step 2: 任意の $v \in \mathcal{S}$, 任意の $\beta \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して $\lim_{s\downarrow 0} |v * \varphi_s - v|_{0,\beta} = 0$.
Step 2 の証明: $v_\beta(x) = x^\beta v(x), (v * \varphi_s)_\beta(x) = x^\beta (v * \varphi_s)(x)$ とおくと

$$|v * \varphi_s - v|_{0,\beta} \leq ||(v * \varphi_s)_\beta - v_\beta * \varphi_s||_\infty + ||v_\beta * \varphi_s - v_\beta||_\infty$$

いま $v_\beta \in \mathcal{S}$. よって補題 6.1.4 により $\lim_{s\downarrow 0} ||v_\beta * \varphi_s - v_\beta||_\infty = 0$.

一方 $\mathcal{F}v = \widehat{v}$ とするとき

$$\mathcal{F}((v*\varphi_s)_\beta - v_\beta * \varphi_s) = i^{|\beta|}(D^\beta(\widehat{v}\psi_s) - (D^\beta\widehat{v})\psi_s) = i^{|\beta|}\sum_{\gamma+\omega=\beta, |\gamma|\geq 1} D^\omega\widehat{v}D^\gamma\psi_s$$

$D^\omega\widehat{v} \in \mathcal{S}$ より Step 1 を用いれば $s\downarrow 0$ で $||D^\omega\widehat{v}D^\gamma\psi_s||_1 \to 0$. 従って $s\downarrow 0$ で $||\mathcal{F}((v*\varphi_s)_\beta - v_\beta*\varphi_s)||_1 \to 0$. 逆 Fourier 変換を考えれば $s\downarrow 0$ で

$$||(v*\varphi_s)_\beta - v_\beta*\varphi_s||_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}||\mathcal{F}((v*\varphi_s)_\beta - v_\beta*\varphi_s)||_1 \to 0.$$

以上より Step 2 は示された。
Step 3: 任意の $\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して $\lim_{s\downarrow 0}|u*\varphi_s - u|_{\alpha,\beta} = 0$.
Step 3 の証明: 補題 6.2.6 より $D^\alpha(u*\varphi_s) = (D^\alpha u)*\varphi_s$ である。$v = D^\alpha u$ とおくと $v\in\mathcal{S}$ であり $|u*\varphi_s - u|_{\alpha,\beta} = |v*\varphi_s - v|_{0,\beta}$. 従って Step 2 より Step 3 は明らか。
補題は Step 3 より明らかである。 □

系 7.2.7. 任意の $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\{u_m\}_{m\geq 1}\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を「任意の $N\in\mathbb{N}_*$ に対して $\lim_{m\to\infty}|u_m - u|_N = 0$」となるように選ぶことができる。とくに $F,G\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で任意の $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $F(\varphi) = G(\varphi)$ ならば $F = G$ である。

命題 *7.2.5* の証明. 任意の $u\in C_c^\infty$ に対して部分積分により

$$\phi_{f_k}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k u dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial u}{\partial x_k}dx = -\phi_f(\frac{\partial u}{\partial x_k}) = \frac{\partial\phi_f}{\partial x_k}(u)$$

$u\in\mathcal{S}$ に対して系 7.2.7 より $\{u_m\}_{m\geq 1}\subset C_c^\infty$ で任意の $N\in\mathbb{N}_*$ に対して $\lim_{m\to\infty}|u_m - u|_N = 0$ となるものがとれる。このとき

$$\phi_{f_k}(u) = \lim_{m\to\infty}\phi_{f_k}(u_m) = \lim_{m\to\infty}\frac{\partial\phi_f}{\partial x_k}(u_n) = \frac{\partial\phi_f}{\partial x_k}(u).$$

よって $\phi_{f_k} = \frac{\partial\phi_f}{\partial x_k}$. □

命題 7.2.8. $f\in\mathcal{S}', \varphi\in\mathcal{S}$ あるいは φ は多項式とする。$u\in\mathcal{S}$ に対して $(f\varphi)(u) = f(\varphi u)$ と定義すると $f\varphi\in\mathcal{S}'$ である。さらに

$$\frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi + f\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$$

が成り立つ。$f\varphi$ を *tempered distribution* f と φ の積という。

補題 7.2.9. $N \geq 0$ に対して、ある $c_N > 0$ があって任意の $u, v \in \mathcal{S}$ に対して

$$|uv|_N \leq c|u|_N|v|_N.$$

命題 *7.2.8* の証明. 任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して $|f(u)| \leq c|u|_N$ とする。このとき補題 7.2.9 より $|f(\varphi u)| \leq c|\varphi u|_N \leq c_N c|\varphi|_N|u|_N$. さらに

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_k}(u) = -(f\varphi)(\frac{\partial u}{\partial x_k}) = -f(\varphi\frac{\partial u}{\partial x_k}) = -f(\frac{\partial(\varphi u)}{\partial x_k}) + f(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}u) \\ = (\frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi)(u) + (f\frac{\partial \varphi}{\partial x_k})(u)\end{aligned}$$

□