(ii)　$L_n(x) = e^x D^n(x^n e^{-x})$ に対し $0 \le m \le n$ なら $\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = (n!)^2\delta_{m,n}$.
〔ヒント：まず，部分積分で次を示す：

$$\int_0^\infty x^m L_n(x)e^{-x}\,dx = (-1)^m m! \int_0^\infty D^{n-m}(x^n e^{-x})\,dx = (-1)^n (n!)^2 \delta_{m,n}.〕$$

8.2　三角関数によるフーリエ級数

次の定理はフーリエ級数展開の最も古典的な例で，単に “フーリエ級数展開” と言ったとき，この定理で述べる展開を指すこともある．

定理 8.2.1.（三角関数によるフーリエ級数展開） $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $T = b - a > 0$,

$$e_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp(2\pi\mathbf{i}n\theta/T), \quad n \in \mathbb{Z}, \ \ \theta \in I$$

とおくと，$E = \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(I)$ の完全正規直交系である．したがって，全ての $f \in L^2(I)$ に対し級数：

$$f^{\wedge\vee} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{\wedge} e_n = \lim_N \sum_{|n|\le N} f_n^{\wedge} e_n, \quad \text{ただし，} f_n^{\wedge} = \int_I f\overline{e_n} = \int_I f e_{-n} \tag{8.1}$$

が $L^2(I)$ で収束し，$f = f^{\wedge\vee}$, a.e.（証明後の注意参照）．

証明　E が正規直交系であることは容易に分かる(問 8.2.1)．完全性のためには，$\mathrm{span}(E)$ が $L^2(I)$ で稠密ならよい(定理 8.1.3)．一方，$C_{\mathrm{c}}(\mathring{I})$ は $L^2(I)$ で稠密(定理 7.3.1)．したがって，任意の $f \in C_{\mathrm{c}}(\mathring{I})$ を $\mathrm{span}(E)$ の元により近似（$L^2(I)$-ノルムの意味で）できればよい．ところが，この近似は，より強く，I 上の一様ノルムの意味で可能である(例 7.5.5)．したがって，定理 8.2.1 が示された．　□

定理 8.2.1 に関する注意を述べる．

- (8.1) の級数 $f^{\wedge\vee}$ は $L^2(I)$-収束により定義される級数であり，各点収束とは限らない．等式 $f = f^{\wedge\vee}$ も I 上 a.e. で成立するが，各点で成立するとは限らない(例えば例 8.2.2 で $x = 0, 1$ の場合)．一方，f が $x \in I$ で連続かつ級数 $f^{\wedge\vee}$ が x の近傍で一様収束すれば $f^{\wedge\vee}$ は x で連続なので $f(x) = f^{\wedge\vee}(x)$ が成立(例えば例 8.2.2 で $x \in (0,1)$ の場合)．

- 展開 (8.1) は次のように書き換えることもできる：

$$f^{\wedge\vee} = f_0^{\wedge} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^{\wedge} e_n + f_{-n}^{\wedge} e_{-n}). \tag{8.2}$$