# 現代数学への流れ

浪川　幸彦

July 11, 2007

# 2　関数の近似

## 2.3　三角関数による関数の近似

最後の話題として，三角関数による関数の近似，いわゆる Fourier 級数の概要を学ぼう。ここで「近さ」としては２乗ノルムを用い，その近似級数を求めるのには直交性が有効に働いている。

### 2.3.1　Fourier 展開

出発点は三角関数の直交性である：

**Proposition 2.3.1.**

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx &= 0.
\end{aligned}$$

**Definition 2.3.2.** $f(x)$ を区間 $[-\pi,\ \pi]$ で積分可能な関数とする。

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}$$

を $f(x)$ の Fourier **係数**とよび，これから作った級数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

を $f(x)$ の Fourier **展開**または Fourier **級数**とよぶ。

*Remark.* １）直交性から，展開の係数を定めることは（少なくとも理論的には）容易である。
２）数学的には，この「積分」を Lebesgue 積分の意味に取った方がよいが，Riemann 積分の意味で考えても構わない。

**問題**. Fourier 展開はもとの関数 $f(x)$ をどれだけ「近似」しているか？

**答**. １）$f(x)$ が２乗可積分であれば，Fourier 級数は２乗ノルムで $f(x)$ に収束する（平均収束)。
２）$f(x)$ が周期的，微分可能でしかも導関数が連続であれば，Fourier 級数は $f(x)$ に一様収束する。

### 2.3.2 Fourier 係数の性質

まず幾つかの予備的な考察を行って，Fourier 係数の持つ性質を明らかにしておこう。Fourier 級数の部分和を

$$s_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

と定義しておく。まずこれが最小２乗近似になっていることを示す。

**Proposition 2.3.3.** 有限三角級数 $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ の中で $s_n$ は

$$\left\| f(x) - \left( \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right) \right\|_2$$

を最小にする。

*Idea of proof.*

$$上式^2 = \|f(x) - s_n\|_2{}^2 + 2\pi \left( \alpha_0 - \frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \pi \left( \alpha_k - a_k \right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \pi \left( \beta_k - b_k \right)^2$$

さらにこの左辺が非負であることと右辺の具体的な形から

**Proposition 2.3.4 (Bessel の不等式).**

$$\frac{1}{\pi}\|f(x)\|_2{}^2 \geq 2\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left({a_k}^2 + {b_k}^2\right)$$

**Corollary 2.3.5.** 級数

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}{\|s_n\|_2}^2 = 2\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left({a_k}^2 + {b_k}^2\right)$$

は収束する。特に $a_n, b_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$.

*Remark.* 上の系の後半は Riemann-Lebegue **の定理**とよばれる。

繰り返しになるが，以上の技法は三角関数の直交性からの直接的帰結であり，座標幾何での直交射影の方法（空間内で，ある点から別の平面への最短距離はその点から平面に垂線を下ろすことで得られる）そのものである。

### 2.3.3 相加平均総和法

Fourier 級数そのものの収束性（総和可能性）は $f(x)$ が連続関数の場合でも一般に難しい。これを補うものとして，部分和の相加平均の数列を用いる Cesaro の一次総和法（$(C,1)$ 総和法）がある。

**Definition 2.3.6.** Fourierr 級数の部分和 $s_n$ に対し，その平均

$$S_n = \frac{1}{n}\left(s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n\right)$$

を Fejér **の平均**とよぶ。

**Theorem 2.3.7 (Feiér).** １）$f(x)$ はさらに $f(\pi) = f(-\pi)$ （周期的）と仮定するとき

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t) - f(x))\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

２）さらに $f(x)$ が連続であれば $S_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する。

これからこの場合前項の Bessel の不等式が実は等式に収束すること，すなわち Parseval の等式が得られる。これは問題への第１の解答を与える。

**Theorem 2.3.8 (完備性).** $f(x)$ は周期的かつ連続であるとすると

$$\frac{1}{\pi}{\|f(x)\|_2}^2 = 2\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left({a_k}^2 + {b_k}^2\right)$$

*Remark.* 任意の２乗可積分な関数が連続関数で一様に近似できることから，実はこの性質はすべての２乗可積分な関数について成り立つ。これが本当の意味での完備性である。

### 2.3.4 滑らかな関数での総和可能性

前項の結果から問題への第 2 の解答も得られる。

**Theorem 2.3.9.** $f(x)$ が周期的で微分可能，かつ $f'(x)$ も連続とするとき，Fourier 級数は $f(x)$ に一様収束する。

*Idea of proof* Fourier 級数が絶対収束することを示せば，項別積分により結果が得られる。
*Remark.* この仮定は区分的に滑らかでもよい。すなわち有限個の除外点の存在も許される。ただし収束は,「除外点以外で広義一様収束」になる。その場合もしその点において右極限 $f(x+0)$ と左極限 $f(x-0)$ が存在すれば級数の極限は

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

となることが知られている。

またそのことから,「周期的」の仮定も不要である。

# 第4回レポート

次の要領で第４回のレポートを提出してください。

- 課題：以下の４つの課題の中から，必須を含む３問を選び答えてください：
  １．Chebyshev 多項式は区間 $-1 \leq x \leq 1$ 上で重み $1/\sqrt{1-x^2}$ の２乗ノルムで直交していることを示せ；
  ２．Legencre 多項式を８次まで求めよ（結果だけでなく，求め方も）：
  ３．２個以上の関数の Fourier 展開を求めよ（ただし授業で行ったものは除く，いれかの関数は不連続点を含むこと）：
  ４（必須）．講義についての感想を述べよ（新たに学んだこと，もっと学びたかったこと等々）
- 期限：７月 25 日（水）正午まで
- 提出方法：講義終了後，事務室廊下の提出ボックス，または電子メールいずれも可（下記の注意参照）
- 注意：レポートの最初に**学生番号・氏名**を必ず明記すること

電子ファイルで提出するときの注意：

- ファイル様式は pdf, MSWord のいずれか。後者は拡張子 .doc のものに限ります（.docx は不可）；
- 電子メールで受け取ったときは必ず受領した旨の返信メールを出します。したがって送ってから３日経っても受領の返事が来ない場合には未着の可能性があるので，確認のメールを出すか，再送信してください。

## 連絡先


- 研究室：理１号館 506 号室
- オフィスアワー：木曜日 11：30〜12：30（それ以外の場合は事前にアポを）
- E-mail : namikawa@math.nagoya-u.ac.jp
- Tel.: (052-789-) 4746
- Website : http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜namikawa/
  講義を欠席した人は，ここから配布プリントをダウンロードして下さい。