書評

E. ハイラー/G. ワナー著 蟹江幸博訳

『解析教程』上下,323 頁+ 339 頁, 1997 年

シュプリンガー・フェアラーク 東京, 3000 円+ 3000 円

この本の原題は,Analysis by Its History である．著者は，厳密性を重視する現代の解析教科書は，集合・写像 $\Rightarrow$ 極限・連続 $\Rightarrow$ 導函数 $\Rightarrow$ 積分の順序で書かれているが，歴史的には全く反対の順序で発展して来たのであり，この歴史的発展の順序に沿って教えることが教育上有効であると主張して本書を書いた．本書では, 正確な ϵ-δ 式の極限の定義は，第 III 章古典的解析の基礎（訳書下巻）で始めて与えられ，第 I 章無限解析入門，第 II 章微積分法は，それを用いないで話が進められる．

従って第 III 章，第 IV 章多変数の微積分は， ϵ-δ 式の極限と有理数のコーシー列の同値類としての実数の定義に基づいて進められるから，現代の多くの教科書と大筋では変らない．(勿論記述の方法や，例や問題などにいろいろ工夫がされている．）ただし IV 章の多変数の部分は若干手薄の印象を受ける．従って特に興味があるのは，第 I,II 章である．

第 I 章は, カルダーノから始まり，デカルト，ニュートンと進む．その主要な内容はオイラーの『無限解析入門』による所が多い．パスカルの二項定理（$(a+b)^n$の展開, $n \in \mathbf{N}$) に続いて，指数 n が -1, $1/2$ の場合の結果が，逐次近似法によって求められている．次に一般の有理数 q を指数とする $(1+x)^q$ の展開（一般二項定理）の結果が定理として述べられているが，そこには, この結果は，ニュートンによって，ウォリスの補間法に示唆を受けて得られた旨の証明があるだけである．この定理は, 本書では第 III 章（下 119 ページ）において，積分剰余項をもつテイラーの定理を用いて証明されている．しかしそれは III 章のいくつかの定理を用いて証明されているので，第 I 章で述べることができなかったのである．この定理の 17・18 世紀風の証明があると都合が良いのだが，オイラーの『入門』も証明なしで結果が述べられているだけなので，このような記述になったらしい．

一方後で $\mathrm{Arc}\sin x$ の展開の証明に用いるので，この結果を省くことができなかったのであろう．その後は比較的スムースに, e^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\mathrm{Arc}\tan x$, $\mathrm{Arc}\sin x$ の整級数展開，オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $\sin x$ の無限級数展開，無限連分数， $\tan x$ の連分数展開などが与えられる．

第 II 章は，導函数および不定積分の計算法の他に，二階導函数と凸性および極値との関係，テーラー級数，包絡線および曲率，積分の近似計算，漸近展開，常微分方程式，その数値解法，オイラー・マクローリンの和公式などが説明されている．

例えば $y=\sin x$ の導函数を求めるのに本書では，I 章の $\sin x$, $\cos x$ の整級数展開を用いて，

$$\begin{aligned} y+\Delta y &= \sin(x+\Delta x)=\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x \\ &= \sin x\left(1-\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\cdots\right)+\cos x\left(\Delta x-\frac{(\Delta x)^3}{3!}+\cdots\right) \end{aligned}$$

となることから，$y'=\cos x$ を出している．I 章で $\sin x$, $\cos x$ の展開を微分法（テーラー展開）を用いずに出していることが，ここで役立っているのである．

我国の代表的な教科書である高木貞治『解析概論』と，本書の内容を比較して見ると，本書にあって『解析概論』にない項目としては,「連分数」,「オイラー・マクローリンの和公式」,「常微分方程式」などがある．逆に本書になくて『解析概論』にある項目としては,「複素解析」,「フーリエ展開」,「ベクトル解析」,「ルベーグ積分」などがある。

『解析概論』には，高校で計算方法を習った学生に対して，より進んだ数学の立場から微積分法を見直させるという姿勢がはっきり見えるのに対し，本書は通常の微積分法の範囲で,その一層深い理解に達し，それを活用できるように，多くの例を通じて学生に語りかけようとしている．

この二つの姿勢の背後には，1930 年代の少数者のための大学と，今日の大衆化した大学の相違がある．

微積分は少なくとも二回学習する必要があり，第一回では計算ができることを目標にし，第二回で理論的な基礎を学ぶのが有効であると，しばしば言われる．そして日本では高校が第一回の学習を受持ち，大学が第二回の教育を行うという了解があるように見える．これに対して，本書では，大学における微積分の教育においても，厳密な理論的基礎を学ぶ前に，オイラーのような自由な考え方で，無限級数や微積分を学ぶことが有効であると主張しているのである．

微積分の教育に数学史を利用しようというアイデアは，かなり以前からあった．例えばテープリッツ [1] は，1926 年の講演で，ルーチンの作業として用いられている諸概念も，その発生の時に遡るとき，人の心を引きつけて止まない探求の対象であったのであるといい，単なる事実の集積にすぎないような歴史ではなく，問題や事実や証明の発生・生成こそが問題なのであり，この生成の過程における決定的な転換点が重要なのだと強調し,「Historie でなくて Genesis」という標語を掲げたのであった．テープリッツは, このような考えに基づいた微積分の教科書を書き始めたが，ヒットラーが政権についたとき，ユダヤ系であったため解職され，結局エルサレムに亡命して，1940 年そこで亡くなった．戦後友人 G. ケーテが遺稿の最初の部分をまとめて出版したのが [2] である．

このテープリッツの本 [2] と本書を比較して見ると，[2] では微積分法の説明と同時に，その歴史についてもかなり忠実にたどろうとしているのに対し，本書は微積分法の記述が主で，その歴史は材料として用いられているにすぎないという差がある．例えばカヴァリエリの『不可分者の幾何学』は，無限小の取扱いや，いくつかの求積問題の答を与えた点で，歴史上無視し得ない存在である．しかし，カヴァリエリの方法は，確実な基礎が欠けて居り，彼自身彼の方法を，同じ問題に二つのやり方で適用するとき異なった答えが生ずる場合があることを注意している．テープリッツの本では，このような事情が説明されている．これに対し本書では，カヴァリエリは積分法の発達に貢献した人として名前が出て来るだけで，カヴァリエリの方法には全く触れていない．微積分の教科書として見る限り，本書の方がテープリッツの本より明快で分り易い．その代わり本書によって微積分法の発展史を正確に知ることはことはできないのである．

微積分法を，初等函数の導函数や不定積分を求め，それを用いて種々の応用問題（例えば求積）を解く技術として矮小化してとらえる傾向が，かなり広く見られる．このような見方をする学生は，微分や積分の極限算法としての本質の理解が不十分であるのが常である．彼等は，$\sin x$ の導函数が $\cos x$ となることは記憶しているが，なぜそうなるのかを自ら問うことはない．

それは公式という名のブラックボックスに入っている存在で，その根拠を問う必要はなく，記憶していれば十分だということらしい．このような態度でも，微積分法の問題として，多くの教科書に出ている問題の答えを出すことはできるであろうが，微積分法を十分理解しているとは言えないのである．例えばある現象を分析して，その現象を支配している法則を微分方程式で表現するといったことは，上のような機械的な微積分法の理解からは出て来ないであろう．この辺に微積分の教育の問題点の一つがあり，我々教師として工夫すべき箇所である．

問題の根は深く，あまりにも画一的すぎる初等教育・中等教育のやり方にまで話は遡らざるを得ない．しかし，大学側にもいろいろなすべきことは多い．特に高校への影響の大きい入試問題については，採点のし易い計算問題ばかりではなく，もっと数学の深い理解を問うような問題を工夫すべきであろう．

さらに大学における数学教育についても，自由な立場から種々の工夫をすべきである．

現在の大衆化した大学において，学生に知的な興奮を引き起こすことは，困難な仕事である．その場合，本書のような独自の見方をした教科書の存在は，大いに助けになる存在である。能力のある人人によって，独創的な教科書が次々に書かれることを期待したい．

本書の訳は，極めて丹念になされて居り良心的である．また問題解答や略伝付人名索引など，訳者によって付加された部分も有用である．

また微分積分が対象ではないが，genetic method によって，数学の歴史と数学理論の内容を同時に解説した本として，H. M. エドワーヅの本 [3],[4] があり，参考となる．

文献

[1] O.Toeplitz, Jahresberichte DMV 56(1927), 88-100.

[2] O.Toeplitz, Entwicklung der Infinitesimalrechnung,Grundlehren der Math. Wissenschaften, 56, Springer Verlag,Berlin, 1949.

[3] H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Acad. Press,New York, 1974.

[4] H. M. Edwards, Fermat's Last Theorem, Graduate texts in Math. 50, Springer Verlag, New York, 1977.

（杉浦光夫）