高校生のための
サイエンスフォーラム

２項定理と関数の展開

大阪府立大学
理学部
情報数理科学科
大内本夫

２００６年8月

はじめに

５万円のお金を年率５％の複利で借りたとき、１年後に返さなければならないお金は

$$5 + 5 \times 0.05 = 5 \times (1 + 0.05) \quad \text{（単位は万円）}$$

です．２年後に返さなければならないお金は、複利なので、$5 \times (1+0.05)$ 万円に５％の利子がつきますから、

$$\begin{aligned} & 5 \times (1 + 0.05) + 5 \times (1 + 0.05) \times 0.05 \\ & = 5 \times (1 + 0.05) \times (1 + 0.05) \\ & = 5 \times (1 + 0.05)^2 \end{aligned}$$

（単位は万円）となります．ただし、$(1+0.05)^2$ は $(1+0.05) \times (1+0.05)$ を表します．同様に考えると、３年後、４年後に返さなければならないお金は

$$5 \times (1 + 0.05)^3, \quad 5 \times (1 + 0.05)^4$$

です.（単位は万円、以下省略）.

もし、７万円借りた時は、５のかわりに７を使って同様のの計算を行うことにより、１年後、２年後、３年後の返済額は、

$$7 \times (1 + 0.05), \quad 7 \times (1 + 0.05)^2, \quad 7 \times (1 + 0.05)^3$$

となります．つまり、$(1+0.05)$, $(1+0.05)^2$, $(1+0.05)^3$ 等を計算しておけば、借りたお金をそれに掛けることにより、１年後、２年後、３年後の返済額がわかります.

次に、利率３％で５万円借りたときの、１年後、２年後、３年後の返済額は

$$5 \times (1 + 0.03), \quad 5 \times (1 + 0.03)^2, \quad 5 \times (1 + 0.03)^3$$

になります．このように考えると、$(1+\square)$, $(1+\square)^2$, $(1+\square)^3$ 等の簡便な表示を得ることにより、借りたお金や利率が変化したときに、返済額を速やかに計算することができます．

上のような考えかたは、お金の返済額を計算すること以外にも様々な場面で有用です．そこで、具体的な場面を離れて、一般的に $(1+\square)^3$ などの表示を考える必要が出てきます．これが、数学における多項式の考え方です．そして、$(1+\square)^3$ のような式の展開を与えるものが２項定理です．この講座では、２項定理について考えます．そしてそれをさらに発展させて、

$$\frac{1}{1+\square}, \qquad \sqrt{1+\square}$$

のような式に対しても、同様に２項定理が成り立つことを見ます．$(1+\square)^3$ のような式に対する２項定理とは、別の考え方で、$\dfrac{1}{1+\square}$ や $\sqrt{1+\square}$ の展開式を考えた結果、２項定理と同様の表示式を得ることは、数学の背後にある不思議な統一性を感じさせられます．このような数学の美しさと不思議を少しでも感じて頂ければ幸いです．

歴史に関する注意．お金を借りる問題は昔から考えられていたようです．例えば、オイラーの１７４８年に出版された『無限小解析入門』では「ある男が、年率５パーセントの高利で４００，０００フローリン借りたら、...」というような問題が挙げられています．（参考文献 [4] の３６ページを参照．）１６２７年に初版が出版された江戸時代の数学書『塵劫記』には「よろづ利足の事」という項目があり、貸し銀や貸し米の問題があります．参考文献 [7] の９５ページの注には次のようにあります．「室町までは複利は法令によって禁じられていた．複利がはじめられたのは、本書（引用者注：『塵劫記』）よりそれほど古い時期ではない．本書の複利の問題がすべて非現実的なのは、無理に作った問題だからであろう．」

第1章　多項式

1.1　変数

変数とはその中に数が入る箱 □ のようなものです．

$$1+2\times\boxed{1},\quad 1+2\times\boxed{3},\quad 1+2\times\boxed{2.35},\quad \cdots\cdots$$

などは、まとめて

$$1+2\times\square$$

と表すことができます．数学ではかけ算の記号 $\times$ はしばしば省略されます．その結果、上の式は

$$1+2\square$$

と表されます．数学では箱 □ のかわりに、文字 x を使います．結局、数学では上の式は

$$1+2x$$

と表されることになります．x には色々な数を入れることができます．x に 3 をいれると、$1+2x$ は $1+2\times 3=7$ となります．x に 3 をいれることを $x=3$ で表します．そうすると、上のことは、

$$x=3 \text{ の時}\qquad 1+2x=1+2\times 3=7$$

と書くことができます．同様に、

$$\begin{aligned}
x=2 \text{ の時}&\qquad 1+2x=1+2\times 2=5\\
x=0 \text{ の時}&\qquad 1+2x=1+2\times 0=1\\
x=\frac{1}{2} \text{ の時}&\qquad 1+2x=1+2\times \frac{1}{2}=2\\
x=-1 \text{ の時}&\qquad 1+2x=1+2\times (-1)=-1
\end{aligned}$$

となります．

注意 1.1.1. 足し算、引き算、かけ算、わり算をする場合は普通はかけ算やわり算を先に計算します．ただし、カッコなどでくくった時は、かっこの中を先に計算します．例えば、

$$\begin{aligned} 1+2\times 3 &= 1+6=7 \\ 2+6\div 2 &= 2+3=5 \\ (1+2)\times 3 &= 3\times 3=9 \\ (2+6)\div 2 &= 8\div 2=4 \end{aligned}$$

1.2　べき乗

ある数を a で表します.（a によって、変数 x とは異なり、ある定まった数（定数）を表します.）$a\times a$ を a^2 で表します．一般に、$n=1,2,3,\cdots$ に対して、a^n によって a を n 回掛けたものを表します．但し、$a^1=a$ です．また、$a^0=1$ と約束します．$a\neq 0$ の時、a^{-n} によって

$$\frac{1}{a^n}$$

を表します．例えば、$a=2$ の時、

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2\times 2\times 2=8 \\ 2^{-1} &= \frac{1}{2} \\ 2^{-3} &= \frac{1}{2^3}=\frac{1}{8} \end{aligned}$$

となります．等式

$$\begin{aligned} a^{-n} &= \frac{1}{a^n}=(a^n)^{-1}, \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=(a^{-1})^n \end{aligned}$$

が成り立ちます．例えば

$$2^{-3}=(2^3)^{-1}=8^{-1}=\frac{1}{8}$$

であり、

$$2^{-3}=(2^{-1})^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

でもあります.

2 乗すると 2 になる正の数を $\sqrt{2}$ または $2^{1/2}$ で表します.（$1/2$ は $\frac{1}{2}$ と同じ意味です.）一般に、正の数 a と $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、n 乗すると a になる正の数を $a^{1/n}$ で表します. $a^{1/n}$ は $\sqrt[n]{a}$ とも書きます. 例えば、次のそれぞれの等号の両辺は同じことを表します.

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}.$$

例えば、

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

今までの話しをすべてまとめて、正の数 a と $n = 1, 2, 3, \cdots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対して、$a^{m/n}$ は n 乗すると a^m になる数を表します.（m/n は $\frac{m}{n}$ と同じ意味です.）等式

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

が成り立ちます. 例えば、

$$2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{2}\,)^3$$

であり、

$$2^{\frac{3}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^3}$$

でもあります. 次のような計算もできます.

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

また、次の等式も成り立ちます.

$$a^{\frac{-m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-1}.$$

例えば、

$$27^{-\frac{2}{3}} = (27^{-1})^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

であり、

$$27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} = \left(\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{-1} = (3^2)^{-1} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

でもあります．今までの話しをまとめると、次のような等式が成り立ちます．

$$
\begin{aligned}
27^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{27} = 3 \\
2^{\frac{3}{2}} &= \sqrt{2^3} = (\sqrt{2}\,)^3 \\
27^{-\frac{2}{3}} &= 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

1.3　多項式

x を変数とします．変数に対しても数と同じ様に、べき乗 $x^{m/n}$ を考えることができます．但し、$x^{1/2}$ を考えるときは、x が変化できる範囲は正の数に限るなどの注意が必要です．$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ を定数として、

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

の形の式を多項式と呼びます．$n = 4$ で、

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 5$$

ならば次の多項式になります．

$$2 + 3x + \frac{1}{3}x^2 + 5x^4$$

例えば、次の式はすべて多項式です．

$$2 + 3x + \frac{1}{3}x^2 + 5x^4$$

$$1 + 3x^2$$

$$2x^2$$

3 （定数も多項式と考えます．）

第2章　2項定理

2.1　組み合わせの数

　4枚のカード $\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit$ から3枚のカードを取り出す取り出し方を考えます．最初は、4通りの取り出し方があります．

$$\begin{array}{c} \clubsuit \\ \diamondsuit \\ \heartsuit \\ \spadesuit \end{array}$$

次に、残りの3枚のカードからそれぞれ3通りの取り出し方があります．

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\clubsuit & \diamondsuit & & \diamondsuit & \clubsuit & & \heartsuit & \clubsuit & & \spadesuit & \clubsuit \\
\clubsuit & \heartsuit & & \diamondsuit & \heartsuit & & \heartsuit & \diamondsuit & & \spadesuit & \diamondsuit \\
\clubsuit & \spadesuit & & \diamondsuit & \spadesuit & & \heartsuit & \spadesuit & & \spadesuit & \heartsuit
\end{array}$$

従って、ここまでで $4 \times 3 = 12$ 通りあります．最後に、残りの2枚のカードからそれぞれ2通りの取り出しかたがあります．

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\clubsuit & \diamondsuit & \heartsuit & & \diamondsuit & \clubsuit & \heartsuit & & \heartsuit & \clubsuit & \diamondsuit & & \spadesuit & \clubsuit & \heartsuit \\
\clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit & & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit & & \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit & & \spadesuit & \clubsuit & \heartsuit \\
\\
\clubsuit & \heartsuit & \diamondsuit & & \diamondsuit & \heartsuit & \clubsuit & & \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & & \spadesuit & \diamondsuit & \clubsuit \\
\clubsuit & \heartsuit & \spadesuit & & \diamondsuit & \heartsuit & \spadesuit & & \heartsuit & \diamondsuit & \spadesuit & & \spadesuit & \diamondsuit & \heartsuit \\
\\
\clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit & & \diamondsuit & \spadesuit & \clubsuit & & \heartsuit & \spadesuit & \clubsuit & & \spadesuit & \heartsuit & \clubsuit \\
\clubsuit & \spadesuit & \heartsuit & & \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit & & \heartsuit & \spadesuit & \diamondsuit & & \spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit
\end{array}$$

以上で、全部で $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りの取り出し方があることがわかります．しかし、順番に関係なく手元に例えば3枚のカード $\spadesuit\diamondsuit\heartsuit$ があればよいのなら、次のものはすべてＯＫです．

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\spadesuit & \diamondsuit & \heartsuit & & \diamondsuit & \spadesuit & \heartsuit & & \heartsuit & \spadesuit & \diamondsuit \\
\spadesuit & \heartsuit & \diamondsuit & & \diamondsuit & \heartsuit & \spadesuit & & \heartsuit & \diamondsuit & \spadesuit
\end{array}$$

これは、$\spadesuit\diamondsuit\heartsuit$ の並べかたの数です．３まいのカード の中から最初は３通りの選び方があります．次に、残りの２枚のカードから２通りの選び方があります．最後は１枚しかカードが残っていないのでそれを取ります．従って、３枚のカード の並べ方は $3\times 2\times 1 = 6$ 通りあります．このことから、上の２４通りのカード の取り出し方の中で、順番に関係なく異なるカード の組み合わせは、

$$\frac{4\times 3\times 2}{3\times 2\times 1} = 4$$

通りあります．つまり、次の４つの組み合わせです．

$$\clubsuit\ \ \diamondsuit\ \ \heartsuit \qquad \clubsuit\ \ \diamondsuit\ \ \spadesuit \qquad \clubsuit\ \ \heartsuit\ \ \spadesuit \qquad \diamondsuit\ \ \heartsuit\ \ \spadesuit$$

一般に n 個のものの中から順番に関係なく r 個のものを取り出す時、それを n 個から r 個とる組み合わせと言います．n 個から r 個とる組み合わせすべての数を ${}_nC_r$ で表します．（これは、

$$\binom{n}{r}$$

とも書きます.）上の例から、${}_4C_3 = 4$ がわかります．一般には、次のように考えます．最初に n 個のものから１つ取り出す取り出し方は n 通りあります．次に、残りの $n-1$ 個のものから１つ取り出す取り出し方は $n-1$ 通りあります．つまり、n 個のものから２個取り出す取り出し方は $n(n-1)$ 通りあります．さらに、３回目には $n-2$ 個のものから１つ取り出すのですから、$n-2$ 通りの取り出し方があります．よって、n 個のものから３個取り出す取り出しかたは、$n(n-1)(n-2)$ 通りあります．このように考えてゆくことにより、n 個のものから r 個取り出す取り出し方は

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

通りあることがわかります．しかし、その中には順番が違うだけで同じ組み合わせのものがあります．r 個のものの並べかたを考えます．１番目は r 個のもののうちどれを取っても良いので、r 通りあります．２番目は残りの $r-1$ 個から取ってくるので $r-1$ 通りあります．３番目は残りの $r-2$ 個から取ってくるので、$r-2$ 通りあります．最後から２番目は残りの２個から取ってくるので２通りあります．最後は１つしか残っていないので、選択の余地はありません．結局 r 個のものの並べ方の数は

$$r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1$$

です．しばしば、

$$r! = r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1$$

と書きます．n 個のものから r 個取り出す取り出し方

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

通りの中で、同じ組み合わせのものがそれぞれ

$$r! = r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1$$

個あるので、n 個のものから r 個取り出す組み合わせの数は

$$\begin{aligned} {}_nC_r &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \end{aligned}$$

であることがわかります．

2.2 2項定理

多項式 $1+x$ の n 乗 $(1+x)^n$ を展開することを考えます．

$$\begin{aligned} (1+x)^1 &= 1+x \\ (1+x)^2 &= (1+x)(1+x) \\ &= 1(1+x)+x(1+x) \\ &= 1+x+x+x^2 \\ &= 1+2x+x^2 \\ (1+x)^3 &= (1+x)(1+x)(1+x) \\ &= 1(1+x)(1+x)+x(1+x)(1+x) \\ &= 1\{1(1+x)+x(1+x)\}+x\{1(1+x)+x(1+x)\} \\ &= 1\{1+x+x+x^2\}+x\{1+x+x+x^2\} \\ &= 1+x+x+x^2+x+x^2+x^2+x^3 \\ &= 1+3x+3x^2+x^3 \end{aligned}$$

$(1+x)^4$ を展開して見ましょう．そのために、a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を定数として、

$$(1+x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

とおきます．a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 の値を見つければ良いわけです．

$$(1+x)^4 = (1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$$

を展開するためには、右辺の４つのカッコの中からそれぞれ 1 または x を持ってくる組み合わせの数を考えます．a_0 は４つのカッコの中から４つの１を持ってくる組み合わせの数ですから、$a_0 = 1$ です．a_1 は４つのカッコのなから x を１つと１を３つ取ってくる組み合わせの数です．それは、結局４つのカッコの中から１つの x を取ってくる組み合わせの数なので、

$$a_1 = {}_4C_1 = \frac{4}{1} = 4$$

となります．a_2 は４つのカッコの中から２つ x を取ってくる組み合わせの数ですから

$$a_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

となります．同様に考えて

$$a_3 = {}_4C_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

最後に、a_4 は４つのカッコの中から４つ x を取ってくる組み合わせの数ですから、$a_4 = 1$ となります．まとめると

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

$(1+x)^n$ の展開も同様に考えることができます．

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r + \cdots + x^n$$

とおいた時、a_r は n 個のカッコの中から r 個の x を取ってくる組み合わせの数になります．つまり、

$$a_r = {}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1}$$

以上により次の２項定理が得られました．

定理 2.2.1 (２項定理). $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&(1+x)^n \\
&= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1}x^r \\
&\quad + \cdots + nx^{n-1} + x^n
\end{aligned}$$

注意 2.2.2. $(x+1)^n$ の展開式に現れる定数 ${}_nC_r$ は２項係数と呼ばれます．２項係数はパスカルの３角形から得られます．各数は上の行の隣り合う２つの数の和になっています．

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

歴史に関する注意．２項係数や上の三角形はパスカル以前にも知られていました．しかし、パスカルが１６５４年までに書いた数論に関する多くの論文の中で、「数３角形論」として新しい観点から取り上げて、数々の著しい成果を挙げました．（[1] 参照．）

第3章　2項定理の一般化

3.1　逆数の展開

$1+x$ の逆数

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$$

の展開を考えます．分母の $1+x$ が 0 になるような x（つまり $x=-1$ ）にたいしては、上の逆数が存在しません．そこで、簡単のために $-1<x<1$ とします．始めに $1-x$ の逆数を考えます．次のような計算ができます．

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x) &= (1+x) - x(1+x)\\ &= 1-x^2\\ (1-x)(1+x+x^2) &= (1+x+x^2) - x(1+x+x^2)\\ &= 1-x^3\\ (1-x)(1+x+x^2+x^3) &= (1+x+x^2+x^3) - x(1+x+x^2+x^3)\\ &= 1-x^4\end{aligned}$$

このことから次のことがわかります．

$$\begin{aligned}\frac{1-x^2}{1-x} &= 1+x\\ \frac{1-x^3}{1-x} &= 1+x+x^2\\ \frac{1-x^4}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3\end{aligned}$$

一般に $n=2,\ 3,\ 4, \cdots$ にたいして、次の式が成り立ちます．

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$$

$-1 < x < 1$ の時、 n が大きくなれば、x^n はどんどん 0 に近づきます. 例えば、$x = 0.1$ の時、

$$\begin{aligned} x &= 0.1 \\ x^2 &= 0.01 \\ x^3 &= 0.001 \\ x^4 &= 0.0001 \end{aligned}$$

従って、上の式で n をどんどん大きくすることにより次の式が成り立ちます.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^r + \cdots$$

ここで x を $-x$ で置き換えてみると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^r + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^r x^r + \cdots \end{aligned}$$

つまり x^r の係数は $(-1)^r$ になります. ここで 2 項定理の係数

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}$$

で、仮に $n = -1$ としてみます.

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1} &= \frac{(-1)((-1)-1)((-1)-2)\cdots((-1)-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-r)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1} \\ &= (-1)^r \end{aligned}$$

つまり、 $(1+x)^{-1}$ の展開式の係数と一致します. その結果、次の定理が成り立ちます.

定理 3.1.1. $n = -1$ とすると、$-1 < x < 1$ に対して次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &(1+x)^n \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1} x^r + \cdots \end{aligned}$$

注意 3.1.2. 上の式では足し算は無限に続きます．無限個の数

$$a_1,\, a_2,\, a_3\, \cdots,\, a_r,\, \cdots$$

の足し算（級数と言います）

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_r + \cdots \tag{3.1}$$

はいつでも有限の決まった値を持つとは限りません．例えば、$1+1+1+\cdots$ の値は限りなく大きくなります．また、$1-1+1-1+1-1+\cdots$ は決まった値を持ちません．級数 (3.1) が決まった有限の値を持つためには、r が大きくなると a_r がどんどん 0 に近づくことが必要です．しかし、a_r が 0 に近づいても級数(3.1) が決まった有限の値を持つとは限りません．

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots \\
&= 1 + 1 + 1 + \cdots
\end{aligned}$$

従って、級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{r} + \cdots$$

の値は無限に大きくなります．定理 3.1.1 は $-1 < x < 1$ に対して、級数

$$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^r x^r + \cdots$$

が決まった有限の値を持つことも意味しています.

3.2 平方根の展開

ここでは、$1+x$ の平方根

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x}$$

の展開を考えます．$(1+x)^{1/2}$ は 2 乗すると $1+x$ になる 0 以上の実数を表します．実数の範囲で平方根が意味を持つためには $1+x \geq 0$（つまり、$x \geq -1$ ）であることが、必要です．ここでも簡単のために $-1 < x < 1$ とします．$a_1, a_2, \cdots$ を定数として、

$$\sqrt{1+x} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r + \cdots$$

とします．$a_1, a_2, \cdots$ の値を求めてみましょう．

$$\begin{aligned}
&1+x \\
&= \sqrt{1+x} \times \sqrt{1+x} \\
&= (1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r + \cdots) \\
&\quad \times (1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r + \cdots) \\
&= 1 + 2a_1x + (a_1^2 + 2a_2)x^2 + (2a_1a_2 + 2a_3)x^3 \\
&\quad + (a_2^2 + 2a_1a_3 + 2a_4)x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

従って次の方程式が得られます．

$$\begin{aligned}
2a_1 &= 1 \\
a_1^2 + 2a_2 &= 0 \\
2a_1a_2 + 2a_3 &= 0 \\
a_2^2 + 2a_1a_3 + 2a_4 &= 0 \\
\cdots&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

この方程式を順次解いてゆくと

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = -\frac{1}{8} \quad a_3 = \frac{1}{16} \quad a_4 = -\frac{5}{128} \quad \cdots$$

となります．これは、次のようにも書けます．

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{8} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} \\
a_3 &= \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3} \\
a_4 &= -\frac{5}{128} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}
\end{aligned}$$

一般に、x^r の係数 a_r は次の式で与えられます.

$$a_r = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}$$

これは、2 項定理の係数

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}$$

で $n=\frac{1}{2}$ としたものです. その結果、次の定理が成り立つことがわかります.

定理 3.2.1. $n=\frac{1}{2}$ とすると、$-1<x<1$ に対して次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}&(1+x)^n\\&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}x^r+\cdots\end{aligned}$$

この場合も上の足し算は無限に続きます.（注意 3.1.2 参照）

3.3 一般化された 2 項定理

これまでで、$(1+x)^{-1}$ や $(1+x)^{1/2}$ の展開式にたいしても 2 項定理（定理 2.2.1）と同様の定理が成り立つことを見てきました. 分数の形で表される数を有理数と呼びます. つまり、$m=1,\,2,\,3,\cdots$, $k=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\pm3,\cdots$ に対して、$\frac{k}{m}$ と表すことのできる数を有理数と呼びます. 自然数 $1,\,2,\,3,\,\cdots$ や $-1,\,\frac{1}{2}$ は有理数です. 有理数に対しても、2 項定理と同様の定理が成り立つことが証明できます.

定理 3.3.1 (一般化された 2 項定理). n を有理数とすると、$-1<x<1$ に対して次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}&(1+x)^n\\&=1+nx+\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}x^r+\cdots\end{aligned}$$

注意 3.3.2. n が自然数（つまり $n=1,\,2,\,3,\cdots$ ）のときは、r が $n+1$ 以上になれば x^r の係数は 0 になります. 従って上の展開式は x^n までの有限の和になります. しかし、n が自然数でなければ、x^r の係数は 0 にならないので、上の和は無限に続きます.（注意 3.1.2 参照）

歴史に関する注意．上の一般化された２項定理 3.3.1 は補間法を用いてニュートンによって１６６４〜１６６５年に発見されました．また、ジェームズ・グレゴリも１６７０年に一般化された２項定理を得ています.（[1], [4] 参照.）

3.4 テイラーの定理

一般化された２項定理はさらに次のテイラーの定理の特別な場合になっています.

定理 3.4.1 (テイラーの定理)． $f(x)$ を 0 の近くで定義された良い性質を持っている関数であるとする．この時、0 に近い x に対して、次の式が成り立つ.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(r)}(0)}{r!}x^r + \cdots$$

ただし、

$$r! = r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1$$

テイラーの定理を用いると次のような関数の展開が得られます.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{r!}x^r + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \end{aligned}$$

注意 3.4.2. 定理 3.4.1 は普通はマクローリンの定理と呼ばれます．マクローリンの定理はテイラーの定理の特別な場合です.

歴史に関する注意．テイラーの定理は１７１５年にテイラーによって初めて公表されました．マクローリンの定理はマクローリンによって１７４２年に導かれています．しかし、ジェームズ・グレゴリは既に１６７１年に「テイラー ＝ マクローリンの定理」を発見しています.（[1] 参照）

参考文献

[1] 伊東俊太郎・原亨吉・村田全著、数学史、筑摩書房、１９７５年.

[2] 高木貞治著、解析概論　改訂第三版、岩波書店、１９８３年.

[3] 日本数学会編集、数学辞典　第３版、岩波書店、１９８８年.

[4] Ｅ．ハイラー・Ｇ．ワナー著、蟹江幸博訳、解析教程　上・下、シュプリンガー・フェアラーク東京、１９９７年.

[5] 三宅敏恒著、入門微分積分、培風館、１９９２年.

[6] 山本芳彦編、高等学校　数学　（平成７年度用）、啓林館、１９９４年.

[7] 吉田光由著、大矢真一校注、塵劫記、岩波書店、１９９８年.