市民の数学「対数」

対数の誕生・成長・発展

成田收*

2005.10.21

*数教協会員　北海道静内高校

目 次

1　はじめに

高校の数学の教員をしていて，日頃から思うことがある.「高校生はなぜ，数学を楽しまないのかなあ」ということである．しかし，なぜそのことを学ぶかということも納得させられずに，習ったことは必ずできるようにならなければならないものであって，時間にも余裕がなく，すぐに覚えて，すぐにできるようにならなくてはならず，その結果を，すぐにテストされるという状況では，一部の人を除いては,「数学」を楽しむ気にはならないだろうなということはわかるような気がする．

それでは，高校の数学とは違って，楽しむための数学というものがあったとしたら，それはどのようなものなのだろうということも考えさせられる．もしも，そのようなものがあったとしたら，それは，高校生ばかりではなく，きっとすべての市民にとっても楽しめるものに相違ないとも考えた．無謀ではあるが，そんなことに挑戦してみたいと思うようになった．

そんなときに出会ったのが，一冊の本「数の大航海」であった．これは，志賀浩二氏が 1999 年に出版したものである．この中で，志賀氏は，対数に焦点を当てながら，数そのものあるいは数学が歴史の中でどのように発展してきたかを描いている．そこには，歴史的発見に立ち会った「数学をつくった人々」が数学を通して描かれていて，読者にもその数学的発見に立ち会っているという臨場感を感じさせる見事なものであった．私は，これだ，この流れ中で，数学と出会うということが，数学の一つの楽しみ方だと感じた．

一方で，私は，北海道の数学教員の集まりである北海道地区数学教育協議会高校サークルに所属している．その，サークルの仲間たちが，高校生や，市民に数学を伝えるために研究してきたたくさんの教材に出会っていた．そこで私は，志賀氏がつくった歴史の流れの「語り」の中で姿を変えながら発展して行く対数を紹介しながら，その流れの中で見えている対数でどんな数学の世界を見ることができるかを，高校サークルの仲間がつくった対数教材で市民とともに学びながら遊ぶことを考えた．そうしてできたのが，この資料である．

次の課題は，この資料などを使いながら，高校生を含む多くの市民とともに，数学と数学の周辺で学びながら遊ぶ場をどのように構成するかということであり，高校自身をどのようにして学びながら遊ぶ市民の遊園とするのかということだと考えている．

この場自身も，そういう場の一つと考えている．

2　誕生前史

2.1　誕生以前

デンマークのティコ・ブラーエ[1]は当時の天文学に必要な複雑で桁数の多いかけ算に多くの時間がかかることから，かけ算を足し算に変えて計算する方法を工夫していた．そのころ，スコットランドではネピア[2]が数学者，プロテスタントの神学者として活躍していた．ネピアは人づてに，ヨーロッパ大陸では，ティコ・ブラーエたちが，かけ算を足し算に変えて計算する方法を開発していることについて聞き及んだ．その方法は，当時すでにかなり精密な三角関数表ができており，その数値と，sin の積和公式

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

を用いる方法であった．
ここでその方法をちょっと試してみよう．

たとえば，6293 と 3256 をかけ算する．
三角関数表から，
$0.6293 = \sin 39^\circ$，$0.3256 = \sin 19^\circ$ なので

$$\begin{aligned}
\sin 39^\circ \sin 19^\circ &= -\frac{1}{2}\{\cos(39^\circ+19^\circ)-\cos(39^\circ-19^\circ)\} \\
&= -\frac{1}{2}\{\cos 58^\circ - \cos 20^\circ\} \\
&= -\frac{1}{2}\{0.5299 - 0.9397\} \\
&= -\frac{1}{2}\times(-0.4098) \\
&= 0.2049
\end{aligned}$$

これに，小数点を補正すると，20490000 となる．
実際に計算すると，$6293 \times 3256 = 20490008$ であり有効数字の分だけ正確な計算ができる．

[1] Tycho Brahe(1546-1601)，有名な天文学者ケプラーの師匠にあたる．
[2] John Napier(1550-1617)

2.2 シュティーフェルの指摘

この，かけ算を足し算に変えることに対する需要が大きいと感じたネピアは，もっと直接的な方法で，積を和に変えることができると考え，その工夫を始めた．
その方法は画期的な方法であった．
公比が 1 よりも小さくかなり 1 に近い値にとって，刻みが小さい等比数列を使い，その等比数列に等差数列を対応させることであった．
その発想のひな形は，1544 年のミハエル・シュティーフェル[3]の「算術全書」の中に見られる．

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2 x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

シュティーフェルは上のような等比数列と等差数列の対応を考え，上の段で $4 \times 16 = 64$ になるのに対応して下の段では $2 + 4 = 6$ になることに注意を与えている．たしかに，2^n の数表を持っていれば，かけ算が足し算で処理されることになる．

このことを発展させて，氏家英夫[4]は北海道地区数教協高校サークル　ブックレット第 2 号 「量の解析に基づく指数関数・対数関数の指導」で対数メガネを登場させている．資料編の冒頭に、このうち、「対数関数の指導」の部分を載せてある。参考にされたい。

[3] M.Stifel(1486?-1567)
[4] 白樺学園高校

3　対数の誕生

3.1　ネピアの対数の誕生

しかし，2^n の整数指数の表だけでは，あまりにも値がとびとびで，実用の計算には適さない．そのため，あらゆる数のかけ算ができるようにネピアは考えをめぐらせた．その目的のためには，初項に十分大きな数を持ってきて，公比を 1 よりわずかに小さく，あまりに 1 に近い数のため，かけても数値の変化が 1 以内であるものを考えた．　具体的には，半径が 1 千万（ 10^7 ）の円を考え，初項を 1 千万とし，公比 r を $r=(1-\frac{1}{10000000})=(1-\frac{1}{10^7})$ とし，初項を第 0 項とした等比数列 $\{a_n\}$ を考え， 1 分刻みの角度 θ に対して，$10^7\sin\theta$ が，その等比数列の何項目にあたるかを計算した表を作って，かけ算をほぼ足し算のみで計算できるようにした．

また，当時は天文学や航海術に伴う数の計算が主なものであったため，大きな数のかけ算が必要になるのは，三角関数の計算をともなって起こった．したがって，直接整数値に対しての対数表がつくられるのではなく，半径が 1 千万（ 10^7 ）の円を考え 1 度を６０等分した 1 分刻みの三角関数の値を 1 千万（ 10^7 ）倍した値に対して自由に計算できることを目的に対数表がつくられた．

　いま，かけ算を計算したい二つの数を M と N とする．
$M\approx 10^7\sin\alpha$ と $\mathrm{N}\approx 10^7\sin\beta$ とする．
このとき，さらに，
$10^7\sin\alpha\approx a_m$ と $10^7\sin\beta\approx a_n$ とすると，
$a_m=10^7r^m$，$a_n=10^7r^n$ となる，
$a_m\times a_n=10^7r^m\times 10^7r^n=10^7 10^7r^{m+n}=10^7a_{m+n}$ となるので，
a_{m+n} の所の表を逆に見て，10^7 倍すれば
M と N のかけ算の値がわかることになる．

実際に，a_n の計算方法を見てみよう．$a_0=10000000$
$a_1=10000000(1-\frac{1}{10^7})$
$a_2=10000000(1-\frac{1}{10^7})^2$
$a_3=10000000(1-\frac{1}{10^7})^3$
$\ldots$
となるが，
$a_1=a_0(1-\frac{1}{10^7})$
$=a_0-a_0\times\frac{1}{10^7}$
$=10000000-1=9999999$
すると，次の項 a_3 は
$a_2=a_1(1-\frac{1}{10^7})$
$=a_1-a_1\times\frac{1}{10^7}$
$=9999999-0.9999999=9999998.0000001$

$a_3 = a_2(1 - \frac{1}{10^7})$
$= a_2 - a_2 \times \frac{1}{10^7}$
$= 9999998.0000001 - 0.99999980000001 = 9999997.00000029999999$
$a_4 = a_3(1 - \frac{1}{10^7})$
$= a_3 - a_3 \times \frac{1}{10^7}$
$= 9999997.00000029999999 - 0.999999700000029999999 = 9999996.000000599999960000001$
というように，前の項から前の項の小数点を7つずらした項を引き算することによって得られる．
したがって，小数点以下8桁以降は整数部にほとんど影響を与えないので8桁目を四捨五入して8桁目以降を無視すると，

a_0	10000000 .
	1 .
a_1	9999999 .
	0 . 9999999
a_2	9999998 . 0000001
	0 . 9999998
a_3	9999997 . 0000003
	0 . 9999997
a_4	9999996 . 0000006
	0 . 9999996
a_5	9999995 . 0000010
	0 . 9999995
	$\cdots$
	$\cdots$
	$\cdots$

のように，単純な引き算の繰り返しで次々と数値計算をすることができる．
これを繰り返していくと，

	$\cdots$	
	$\cdots$	
	$\cdots$	
a_{96}	9999904 . 0004560	
	0 . 9999904	
a_{97}	9999903 . 0004656	
	0 . 9999903	
a_{98}	9999902 . 0004753	
	0 . 9999902	
a_{99}	9999901 . 0004851	
	0 . 9999901	
a_{100}	9999900 . 0004950	

などとなり，桁数の移動と引き算だけで，いくらでも好きなだけ，$a_n = ar^n$ を計算することができる．原理的には，これで得られた数表を用いて，かけ算やわり算，２乗３乗の計算をすることができる．[5]

3.2 ネピアの対数疑似体験版

ネピアの対数を，桁数を小さくして擬似的に体験することによって，ネピアの対数の性格をだいたいつかむことができると思われる．

当時は，天文計算の必要性に答えるために三角関数の値の計算を問題にしたが，いまは sin を取り除いて，１千万も大きすぎて表を作るのが大変なので，100 とすることにする．

いま，71×53 を計算しようと考える．
すると，別表 1 をみると 71.055323 の対数は 34
53.090554 の対数は 63 なので
$34 + 63 = 97$ を計算する．
対数が 97 であるところを，表で確かめると，37.723665 となっている．
この結果は，$ar^{34+63} = ar^{97}$ の値であるが，実際に必要なのは $ar^{34} \times ar^{63} = a^2r^{97}$ なので，得られた値を a 倍，すなわち 100 倍して 3772 となる．
この数値がほぼ $71.055323 \times 53.090554$ の結果に等しい．
71×53 の結果はこの値に近いと考えることができる．
実際，$71.055323 \times 53.090554 = 3772.366462718942$,
$71 \times 53 = 3763$ なので，
この場合，ほぼ２桁の精度で信頼することができる．

[5]実際には，この方法だけでは $500,0000$（$1,000,0000$ の半分）になるまでに，$693,1471$ 回（６９０万回）の同様な計算をすることになる．これは，ほとんど不可能に近いため，ネピアはある方法を工夫をし，さらに近似の考え方を使ってこのことを回避した．資料編 6.2 を参照

この計算をもう少し正確にするために，ネピアは近似の考え方を使った．

図 1: 7 1 の対数

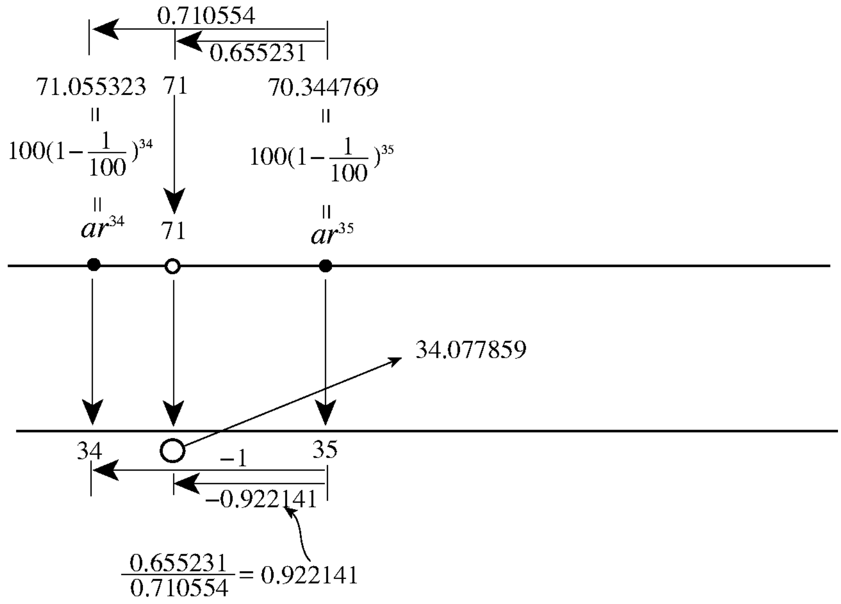


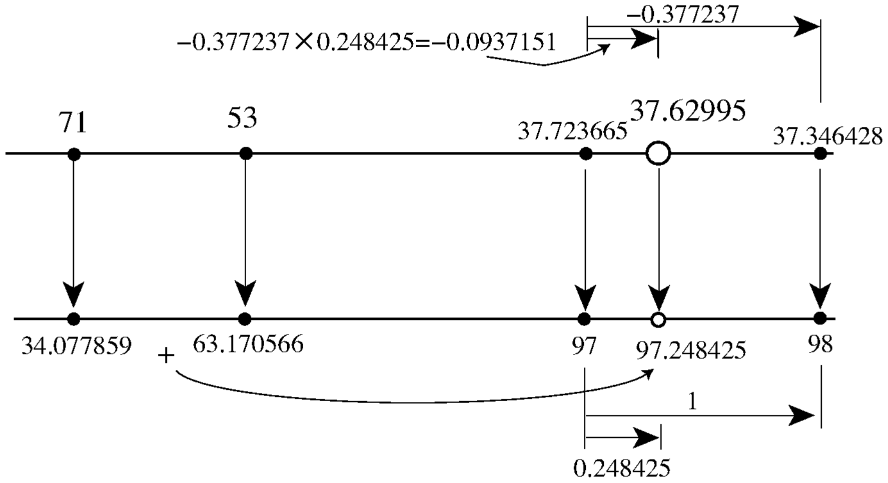
図 1 のように，比例の考え方（線形補間法）を使って，
71 の対数の近似値 34.077859 を得た．
同様に計算した 2 桁の整数の対数の表を，末尾の別表 3 に掲げておく．
すると，53 の対数は，63.170566
71×53 に対応して，$34.077859 + 63.170566 = 97.248524$ を得る．
これは，97 と 98 の間の数なので，図 2 のように比例計算し，37.62995 を得る．
これを，100 倍して，71×53 の対数を用いた計算結果，3762.995 を得る．

この値は，$71 \times 53 = 3763$ とほぼ一致している．

これらのことを，7 桁の精度で行い，「Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio」（英語訳 Desccription of the Wonderful Canon of Logarithms) という著作にして表した (1614 年）のが，ネピアが最初に取り組んだことであった．ネピアは，この数に，ギリシア語の $\lambda \acute{o} \gamma o \nu$（logos 比）と $\acute{\alpha} \rho \iota \theta \mu \acute{o} \varsigma$（arithmos 数）から logarithm という言葉を作ってあてた．

しかし，この対数の計算で，29×23 のような計算をする場合，対数がそれぞれ 123.16816，146.23242 となり，その和 269.401 は 10 の対数 229.10576 を越えてしまう．
そのため，269.401 から 229.10676 を引いて 40.2938 を求め，対数が 40.2938 となる数

図 2: ７１×５３の対数



6670.2 を得た後，$\frac{1}{10}$ をかけて，667 を得る，という操作をすることになる．
すなわち，$\frac{1}{10}$ をかける操作に対して，対数側では 229.10576 を引く操作が求められる．

ネピアの対数は，$\frac{1}{10}$ に対する対数が 23025849.77，$\frac{1}{2}$ に対する対数が 6931472.12，であり，桁数の処理が複雑な上，かけ算が完全には足し算に変換されないという意味で決して使い勝手の良いものではなかった．

練習問題

勝手に，２桁の整数を２つ考え，これを，ネピア対数の考え方でかけ算を計算せよ．
また，わり算，２乗，３乗を計算せよ．

3.3 ネピアの対数概念の誕生

ネピアは１６１４年に Mirifici Logarithmorum Caonis Descriptio(英語訳:Description of the Wonderful Canon of Logarithms)
１６１９年に Mirifici Logarithmorum Caonis Constructio(英語訳：Construction of the Wonderful Canon of Logarithms) を出版している。[6]
Description　が対数表を使うために、主に対数の紹介と対数表と対数の使い方を述べたものであるのに対し、Constoraction は、対数表作成の詳細な課程と新しく、1 の対数を 0 とする対数（常用対数）の構想について述べたものである。
この Mirifici Logarithmorum Caonis Descriptio の第 1 章に

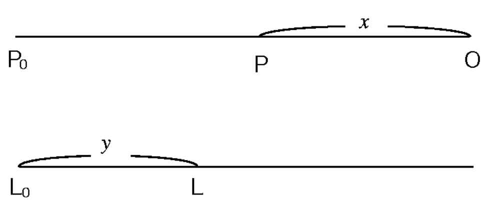
> 「任意の sine の Logarithme とは、次の線分を非常に近く表現する数のことである。その線分は平均的な時間で等しく増加しており、一方、全 sine の方の線分は、比例的にその sine に向かって減少している。このとき両方の線分の運動は等しい時間で行われ、またはじめは同じ速さを持っている。」

と記述されている。

当時は、桁数の多い精密な計算は、主に天文学で必要とされたため、三角関数の値、すなわち sine の値のかけ算を正確にすることが求められていた。そのため、ネピアは、すべての角度に対して、その角度に対する sine の値に対する対数を計算することを目標とした。

また、当時は、小数の概念ができあがっていなかったため、小さな角度に対応する正確な sine の値を取り扱うために、円の半径を大きくして扱った。つまり、$r = 1$ として、$r\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1.41421356\cdots}{2} = 0.7071067\cdots$ とするかわりに、$r = 10^7$ として $r\sin 45^\circ = 10^7 \sin 45^\circ = 10^7 \times 0.7071067\cdots = 7071067$　を使うことによって、整数によって精密な値を表現した。

このことから、ネピアはさしあたって、全 sine10^7 つまり、一千万以下のすべての整数のかけ算について考えればよいことになる。



したがって、「任意の sine の Logarithme とは $\cdots$」で述べられていることを、現代風に言い換えると、つぎのようになる。すなわち、

[6]Mirifici Logarithmorum Caonis Constructio はネピアのの死後、息子のロバート・ネピアによってネピアの遺稿として刊行された。

異なる直線上を運動する動点 Q と P を考える。点 Q は、最初点 L_0 にいて、等速運動をしている。一方、全 sine をあらわす動点 P は最初、点 P_0 にいて、終点 O に向かって動いている。その速さは、PO の長さに比例している。この点が目的の点に達したときの残りの線分の長さを x とする。すなわち、$x = \mathrm{OP}$ とする。このとき、$y = \mathrm{L_0L}$ が x の Logarithme をあらわす。

と、いうことになる。

ここで、全 sine　$\mathrm{P_0P}$ を $a = 10^7$ とし、時間の単位を $t = \dfrac{1}{10^7}$、経過時間 t の間は、近似的に速度が変わらないと考えると、ネピアの対数表ができあがる。

1 単位時間 t 経過したときの動点 P の位置を表す座標を $x = a_1$ とし、

n 単位時間 nt 経過したときの動点 P の位置を表す座標を $x = a_n$ とする。

$$a_0 = a = 10^7$$

a_0 から a_1 までは、時間 t が経過する間、速さ a で動く（比例定数 1 ）と考えて、移動距離は at なので、

$$a_1 = a - at = a(1-t) = 10^7 - 10^7\frac{1}{10^7} = 10^7 - 1 = 9999999$$

a_1 から a_2 までは、時間 t が経過する間、速さ $a_1 = a(1-t) = 9999999$ で動くと考えて、移動距離は $a(1-t)t$ なので、

$$\begin{aligned} a_2 &= a(1-t) - a(1-t)t = a(1-t)^2 \\ &= 9999999 - 9999999\frac{1}{10^7} = 9999999 - 0.9999999 = 9999998.0000001 \end{aligned}$$

以下同様に

$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$

$$a_n = a(1-t)^n = \cdots$$

他方、動点 Q は 1 単位時間に 1 動く等速運動をすると考えると、

a_0 の対数は 0

a_1 の対数は 1

a_2 の対数は 2

…

…

…

a_n の対数は n

　となり、ネピアの対数表が得られる。
つまり、等比数列に等差数列が対応するシステムが浮き彫りになっている。

　ところで、上の考え方には、時間 t が経過する間、速さ a で動く（比例定数１）と考えている。時間 t が経過する間にも、動点 P の位置は刻々と変化するため、速さはどんどん変化していることを無視して、微小な時間 t が経過する間は速さが変化しないと考えているところに、引用された定義とそれを実現しているモデルの間に隙間が生じている。
　というより、ネピアにとって最初に構造が見えたのは、この、等比数列が等差数列に対応している姿なのではなかったのだろうか。それを精密にするなかで、理論が生まれ、定義が生まれてきたのではないだろうか。この等比数列を生み出す時間経過の単位 t をどこまでも小さくしてゆくと、どの瞬間にも速さが位置に比例する動点の考え方が生まれてきたのではないだろうか。
すると、移動量 Δx を経過時間 Δt で割った値である速さ $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ がその位置 x に比例する（比例定数１）として、（向きが違うため）

$$-\frac{\Delta x}{\Delta t} = x$$

が得られる。

　一方、動点 Q は等速運動なので、その位置は (比例定数 1 として)$y = t$ と表してよいから、$\Delta t = \Delta y$ としてよい。また、$+-$ もいったん無視すると、

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = x$$

これが、どんな微少な経過時間 t に対してもいえると考えたのではないだろうか。
そう考えると、これを変形して、

$$\frac{1}{x}\Delta x = \Delta y$$

が得られる。
この式から、関数 y の姿を求めようとすると、
たとえば、$t = 0$ での初期値 $x_0 = 1$，$y_0 = 0$ とすると、
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のときに $\dfrac{1}{x}\Delta x$ を考えると、それは、関数の値に Δx をかけたもので、図 3 のように長方形の面積になる。
これを、次々と繰り返していくと、

$$y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_n = \frac{1}{x_1}\Delta x_1 + \frac{1}{x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{1}{x_n}\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\Delta x_k$$

図 3: $\dfrac{1}{x}\Delta x$

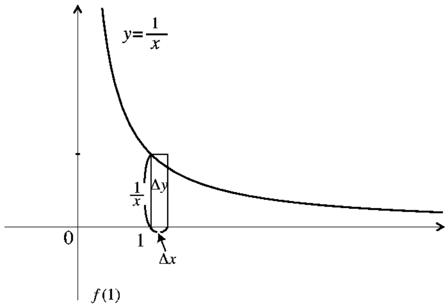
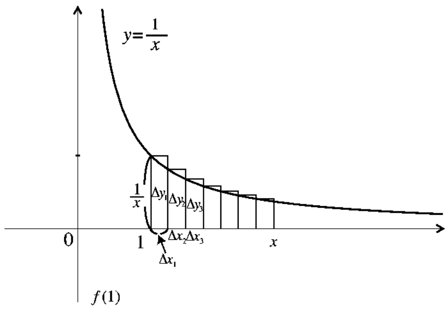


図 4: $y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_n$



であり、図 4 のようになる。

ここで、経過時間 t を小さくしてゆくと、対数 y は関数 $\dfrac{1}{x}$ のグラフの下にあらわれる面積になる。
現代の言葉で言えば、
微分方程式

$$\frac{dx}{dy} = x$$

を

$$\frac{1}{x}dx = dy$$

として、両辺を積分し、

$$\int \frac{1}{x}dx = \int dy$$

$$y = \log x$$

となることをすでに、ネピアは見抜いていたことになる。
しかしネピアは、ニュートンやライプニッツが微積の概念を構成する５０年以上前にこのことにたどり着いたため、微積分の成果を用いることはできなかった。

3.4 ブリッグスの対数ー常用対数ー

Henry.Briggs(1561-1631) ロンドンのグレシャム・カレッジの天文学教授，後にオックスフォード大学の教授となった人である．

ブリッグスは，ネピアとも親交があり，対数を使いやすいものにしたいと願った人である．かれは，ネピアと共同研究し，1 の対数を 0 にすることによりかけ算がそのまま足し算に変換されることや 10 の対数を 10^{10}，すなわち 100 億にすることによって小数点の移動だけですむ使い勝手の良い対数が生み出されることにたどり着いた．

この対数を現代の記号で書くと，
$y = 10^{10}\log_{10} x$ となる．すなわち，底が１０の対数，今日常用対数と呼ばれるものに他ならない．(10 桁の精度を整数で表すために小数点が 10 個ずれていることだけが今日の常用対数と異なる．)

ブリッグスは，この後 1617 年に「Logarithmorum chilias prima」を出版しているが，このときは，1000 までの常用対数を 14 桁まで求めている．さらに，1624 年には「Arihtmetica logarithmica」を表し，1 から 20000 までと，90000 から 100000 までの 14 桁の対数表を示した．

このことによって，常用対数は一気に世界中で受け入れられることになった．
しかし，この対数は，使うのには大変便利であるが，数表を作るために大変な労力が必要であった．例えば，2 の対数を求めようとすると，すでに大変な計算を強いられることになる．

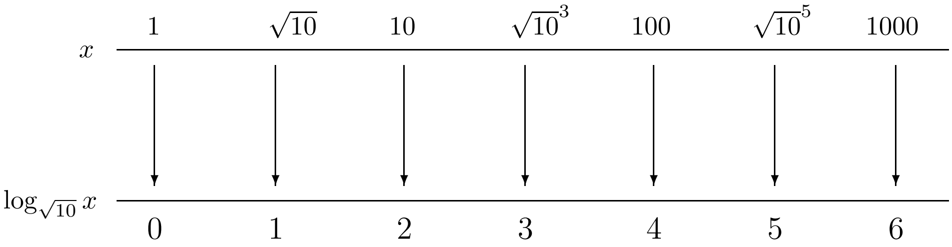
ブリッグスは，2 の対数の値を 14 桁の精度で求めるために，10 の平方根を 28 桁まで計算し，その計算した数の平方根を，また，小数点以下 28 桁まで計算するということを 54 回繰り返し，さらに，2 の平方根を繰り返し同じ精度で計算することが必要であった．

3.5　ブリッグスの対数 $\log_{10} 2$ の値－理論編－

底を $\sqrt{10}$ に固定すると，$\log_{10} 2$ の値はすぐに知ることはできないが，$\log_{10}\sqrt{10}$ の値はすぐに得られる．その値を知るために，底 $\sqrt{10}$ の対数対応表を作り，底 10 の対数対応表と重ね合わせてみるとよい．

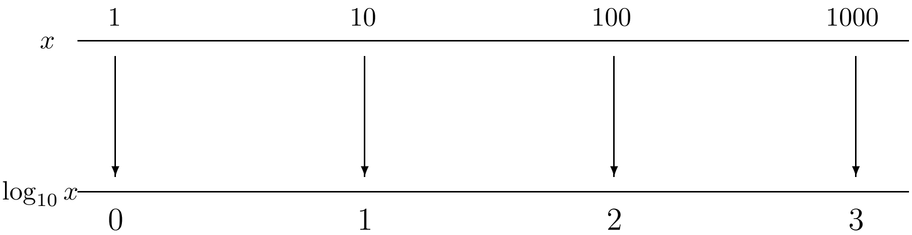
底が $\sqrt{10}$ の対応表は，17 ページの図 5 のようになる．
一方，底が 10 の対応表は，17 ページの図 6 のようになる．

図 5: 底 $\sqrt{10}$ の対数対応表



したがってこれを重ね合わせると，$\log_{10} x$ の値が $\log_{\sqrt{10}} x$ の値の $\dfrac{1}{2}$ 倍になっていること

図 6: 底１０の対数対応表



とから，

$$\log_{10} x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{10}} x$$

となり，

$$\log_{10}\sqrt{10} = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}\sqrt{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

であることがわかる．

同様に，
$\log_{10}\sqrt{\sqrt{10}} = \log_{10}\sqrt[4]{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4} = 0.25$
$\log_{10}\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = \log_{10}\sqrt[8]{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{8} = 0.125$

$$\log_{10}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} = \log_{10}\sqrt[16]{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16} = 0.0625$$
$$\cdots$$

底 2 の対数について，同じことがおこり，

$\log_2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

$\log_2\sqrt{\sqrt{2}} = \log_2\sqrt[4]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4}$

$\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \log_2\sqrt[8]{2} = \log_2 10^{\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{8}$

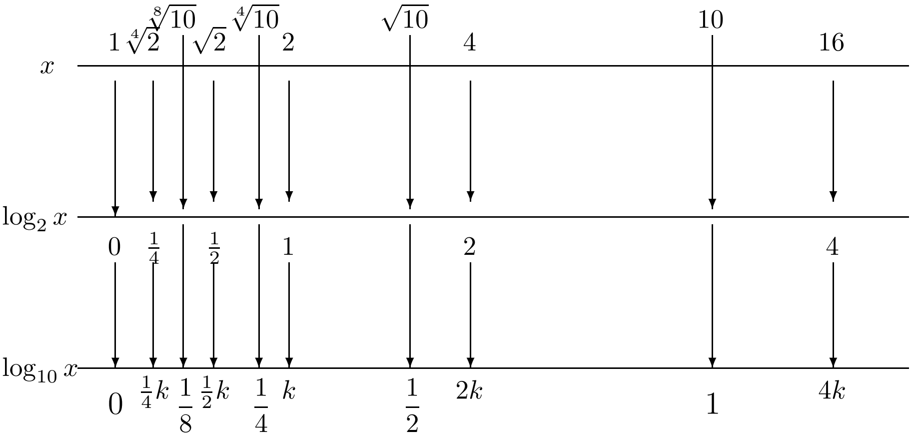
$\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} = \log_2\sqrt[16]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{16}} = \dfrac{1}{16}$

ルートをとるごとに（$\dfrac{1}{2}$ 乗するごとに），対数は $\dfrac{1}{2}$ になる．

したがって，

このことを図示すると，18 ページの図 7 のようになる．

図 7: 1 に近い所の底 2 と 10 の対数対応表



ところで，$A_1 = \sqrt{10}$，$A_2 = \sqrt[4]{10}$，$A_3 = \sqrt[8]{10}$，$\cdots$ の値を小数点以下１０位まで計算して行くと，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
A_1 = \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} &= 3.16227766 \\
A_2 = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{4}} &= 1.77827941 \\
A_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{8}} &= 1.333521432 \\
A_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} = 10^{\frac{1}{16}} &= 1.154781985 \\
A_5 = 10^{\frac{1}{32}} &= 1.074607828
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_6 &= & 10^{\frac{1}{64}} &= 1.036632928 \\
A_7 &= & 10^{\frac{1}{128}} &= 1.018151722 \\
A_8 &= & 10^{\frac{1}{256}} &= 1.009035045 \\
A_9 &= & 10^{\frac{1}{512}} &= 1.004507364 \\
A_{10} &= & 10^{\frac{1}{1024}} &= 1.002251148 \\
A_{11} &= & 10^{\frac{1}{2048}} &= 1.001124941 \\
A_{12} &= & 10^{\frac{1}{4096}} &= 1.000562313 \\
A_{13} &= & 10^{\frac{1}{8192}} &= 1.000281117 \\
A_{14} &= & 10^{\frac{1}{16384}} &= 1.000140549 \\
A_{15} &= & 10^{\frac{1}{32768}} &= 1.000070272 \\
A_{16} &= & 10^{\frac{1}{65536}} &= 1.000035135 \\
A_{17} &= & 10^{\frac{1}{131072}} &= 1.000017567 \\
A_{18} &= & 10^{\frac{1}{262144}} &= 1.000008784 \\
A_{19} &= & 10^{\frac{1}{524288}} &= 1.000004392 \\
A_{20} &= & 10^{\frac{1}{1048576}} &= 1.000002196
\end{aligned}
$$

ここで，小数点以下の数字に注意すると，先の方では，その数値がほぼ $\dfrac{1}{2}$ 倍になっている．

同様に，$B_1 = \sqrt{2}$，$B_2 = \sqrt[4]{2}$，$B_3 = \sqrt[8]{2}$，$\cdots$ の値を小数点以下１０位まで計算して行くと，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} &&= 1.414213562 \\
B_2 &= \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}} &&= 1.189207115 \\
B_3 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{8}} &&= 1.090507733 \\
B_4 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} = 2^{\frac{1}{16}} &&= 1.044273782 \\
B_5 &= 2^{\frac{1}{32}} &&= 1.021897149 \\
B_6 &= 2^{\frac{1}{64}} &&= 1.010889286 \\
B_7 &= 2^{\frac{1}{128}} &&= 1.005429901 \\
B_8 &= 2^{\frac{1}{256}} &&= 1.002711275 \\
B_9 &= 2^{\frac{1}{512}} &&= 1.00135472 \\
B_{10} &= 2^{\frac{1}{1024}} &&= 1.000677131 \\
B_{11} &= 2^{\frac{1}{2048}} &&= 1.000338508 \\
B_{12} &= 2^{\frac{1}{4096}} &&= 1.00016924
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{13} &= & 2^{\frac{1}{8192}} &= 1.000084616 \\
B_{14} &= & 2^{\frac{1}{16384}} &= 1.000042307 \\
B_{15} &= & 2^{\frac{1}{32768}} &= 1.000021153 \\
B_{16} &= & 2^{\frac{1}{65536}} &= 1.000010577 \\
B_{17} &= & 2^{\frac{1}{131072}} &= 1.000005288 \\
B_{18} &= & 2^{\frac{1}{262144}} &= 1.000002644 \\
B_{19} &= & 2^{\frac{1}{524288}} &= 1.000001322 \\
B_{20} &= & 2^{\frac{1}{1048576}} &= 1.000000661
\end{aligned}
$$

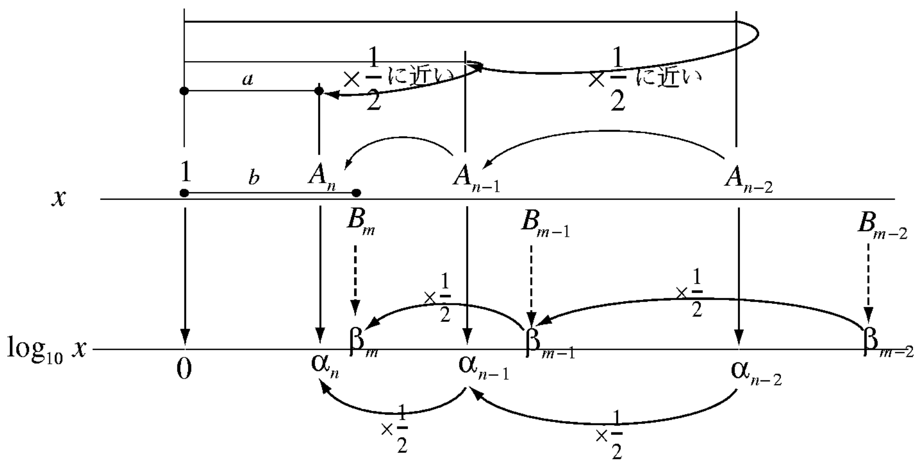
こちらも，小数点以下の数字に注意すると，先の方では，その数値がほぼ $\frac{1}{2}$ 倍になっている．

このことは，一般に $(1+\frac{x}{2})^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4}$ が成り立つが，x が非常に小さい値のとき，$\frac{x^2}{4}$ は x よりはるかに小さい値になるため，ほぼ，$(1+\frac{x}{2})^2 = 1 + x$ が成り立つため，
$\sqrt{1+x}$ は，ほぼ $1+\frac{x}{2}$ に等しくなることによる．

今の場合，x が小数点以下６桁目から始まる数であるとき，x の２乗は小数点１１桁目から始まる数となるため，小数点１０桁目まではほとんど影響を受けず，ルートをとると，半分になることを表している．

これらを，また，対応表によるイメージ図に表すと，図８のようになる．

図 8: 対応イメージ図



A_n と 1 の距離 a_n が A_{n-1} と 1 の距離 a_{n-1} の $\dfrac{1}{2}$ になれば，
α_n が α_{n-1} の $\dfrac{1}{2}$ になるとすると，
$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \dfrac{1}{2}$ であるから，
$\dfrac{a_n}{\alpha_n} = \dfrac{a_{n-1}}{\alpha_{n-1}} = k$ となり，$a_n = k\alpha_n$ となることからもわかるように，
a_n と α_n はほぼ比例する．

同様に，B_n と 1 の距離を b_n で表すと，b_n と β_n はほぼ比例する．

このとき，a_n と b_n がある比例関係にあれば，
α_n と β_n も同じ比例関係にある．

すなわち，$\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ となる．
図の記号でいえば，$\dfrac{b}{a} = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ となり，
b, a, α_n がわかると，
β_n もわかることになる．

$b = B_m - 1, a = A_n - 1$ として，上の A_n, B_n の数値を見れば，
例えば、$n = 15$ として，$A_{15} = 1.000070272, A_{14} = 1.000140549$ なので，
B_m として，$m = 13$ をとれば，
$B_{13} = 1.000084616$ となり，
$A_n < B_m < A_{n-1}$ となる．

このとき，$a = A_n - 1 = A_{15} - 1 = 0.000070272$ であり，
$b = B_m - 1 = B_{13} - 1 = 0.000084616$ となるので，
$\dfrac{b}{a} = \dfrac{0.000084616}{0.000070272} = 1.20412\cdots$ となる．

したがって，$\beta_m = \alpha_n \times \dfrac{b}{a}$ より
$\beta_m = \beta_{13} = (\dfrac{1}{2})^{15} \times 1.20412\cdots = \dfrac{1}{32768} \times 1.20412\cdots = 0.00003051757\cdots \times 1.20412\cdots = 0.0000367468\cdots$ となる．
したがって，
$\log_{10} 2 = \beta = \beta_{13} \times 2^{13} = 0.0000367468 \times 2^{13} = 0.301029\cdots$ となり，
$\log_{10} 2$ の値が，ほぼ 10^{-4} のオーダーまで信頼できる数値として求められた．

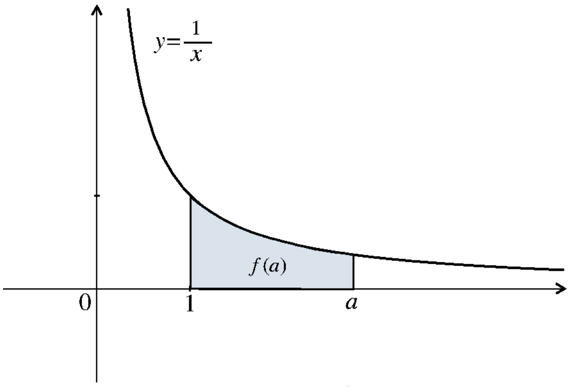
原理的には，この方法と同じ方法でブリッグスは各数の小数点以下３２ケタまで計算することにより，対数の値を１４桁の精度で求めたのである．

この計算の方法を，平方根の計算には８桁計算機を使うことにして，体験できるようにした資料を「$\log_{10} 2$ の値」として，資料編 6.3 に載せてある．

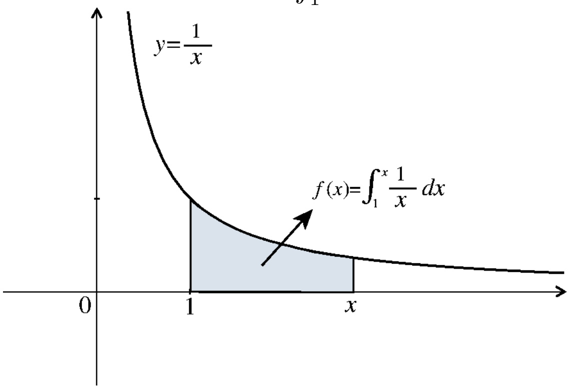
4　対数の成長

4.1　対数関数の幾何学的意味の発見 – 双曲線対数 –

関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと x 軸ではさまれる部分の面積に注目する．すなわち，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと x 軸と直線 $x=1$ と $x=a$ に囲まれる部分の面積を，$f(a)$ とする．



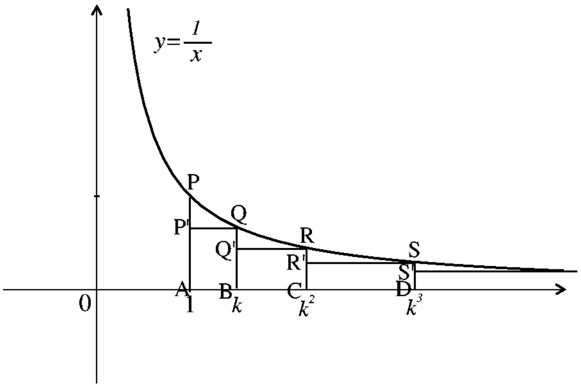
現代的な表現をすると，関数 $\dfrac{1}{x}$ を 1 から x まで積分した値を $f(x)$ とするということである．すなわち，$f(x)=\displaystyle\int_1^x \dfrac{1}{x}dx$ である．



このとき，x 軸上に等比数列 $\{1,k,k^2,k^3,\cdots\}$ をとり，$\{f(1),f(k),f(k^2),f(k^3),\cdots\}$ をしらべると等差数列 $\{0,a,2a,3a,\cdots\}$ をなす．すなわち，この関数は，対数関数である．
このことを発見したのは，ベルギーの神父グレゴリー・聖ヴィンセント（Gregory St.Vincent）である．[7]
グレゴリーはこのことを，次のようにして示した．

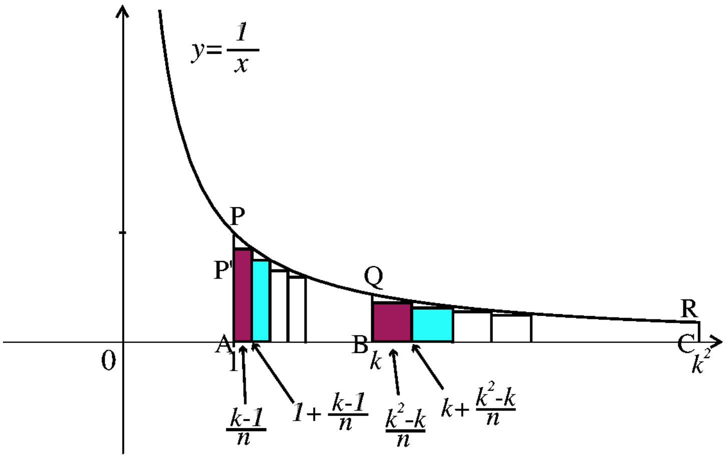
まず，x 軸上に x 座標が等比数列 $1,k,k^2,k^3,\cdots$ をなす点 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D},\cdots$ をとり，図のように長方形を作る．

[7]ヴィンセントがこのことをまとめたものを刊行したのは１６４７年のことである.（刊行は１６４７年だが，これらのことが考察されたのは１６３０年頃のことである.）そこには「直角双曲線の横座標が幾何数列的に増加するならば，その座標によって裁断された表面の面積は算術数列的に増加する.」と述べられている.



すると，これらの長方形がすべて同じ面積を持つことが次のようにしてわかる．
長方形 ABQP$'$ の面積は $\mathrm{AB}\times\mathrm{BQ}=(k-1)\dfrac{1}{k}=\dfrac{k-1}{k}$
長方形 BCRQ$'$ の面積は $\mathrm{BC}\times\mathrm{CR}=k(k-1)\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k-1}{k}$
以下同様にして，底辺が k 倍になると高さが $\dfrac{1}{k}$ 倍になるので，長方形の面積はすべて同じになる．

これと同じことが，AB，BC などを n 等分して，できる長方形どうしの面積についてもいえる．



すなわち，AB を n 等分したうちの i 番目の長方形と，BC を n 等分したうちの i 番目の長方形とは底辺が k 倍で，高さは $\dfrac{1}{k}$ 倍になるので面積は等しい．

このことが，どんな n についてもいえるのだから，n を十分大きくとっておけば，曲線の下にできる図形 $\mathrm{ABQP},\mathrm{BCRQ},\mathrm{CDSR},\cdots$ の面積はすべて等しいことがわかる．

したがって，図形 ABQP の面積 $f(k)$ を a とすると，
図形 ACRP の面積 $f(k^2)$ は $2a$,
図形 $\{\mathrm{ADSP}\}$ の面積 $f(k^3)$ は $3a$ というように等差数列をなす．

$f(1)=0$ であるから，これは，1 で始まる等比数列を 0 で始まる等差数列に対応させる関数になっている．

したがって，この対応自身を対数関数といってよいということになる．

すなわち，

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{x} dx$$

であることが発見されたといってよい．[8]

また，$f(n) = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x} dx$ として，$\displaystyle\int_m^{mn} \frac{1}{x} dx = \int_1^n \frac{1}{x} dx$ であることがわかるから，

$$\begin{aligned} f(mn) &= \int_1^{mn} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^m \frac{1}{x} dx + \int_m^{mn} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^m \frac{1}{x} dx + \int_1^n \frac{1}{x} dx \\ &= f(m) + f(n) \end{aligned}$$

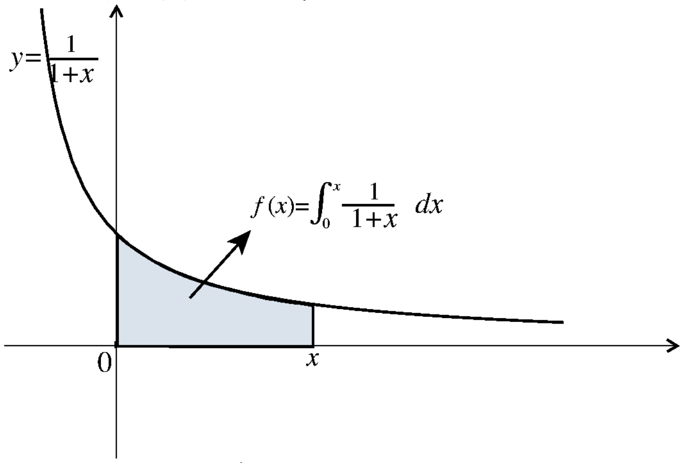
などもすぐに示すことができる．

しかし，なぜ双曲線のグラフの作る図形の面積が対数に等しいのかはわからなかったし，この双曲線のグラフの作る面積を計算することもできなかった．それを最初に可能にしたのは，ニュートンであった．

[8]しかし，志賀浩二氏はグレゴリーの場合，特に n について極限移行をするということはなく，有限の考察の中で行っているため，現在の $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{x} dx$ の概念に達していたとはいえないと言っている．

4.2 双曲線のグラフの作る面積の無限級数表示による計算 – ニュートン –

この時期１６４７年といえば，その２０年後にはニュートンが微分積分の理論の大綱を作った時期である．ニュートン以前にもフェルマーやウォリスが活躍しており，彼らはすでに，x の積分が $\dfrac{x^2}{2}$，x^2 の積分が $\dfrac{x^3}{3}$，$\cdots$ であることを知っていた．
ニュートンは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動したグラフを持つ関数 $y=\dfrac{1}{1+x}$ について，次のような考察を行った．



$\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$ なので，$\dfrac{1}{1+x}$ は二項式の n 乗 $(1+x)^n$ の仲間だと考えたのである．

一般に，二項式の n 乗の展開式の係数（二項係数）は，

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^4+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

のようになることの観察から，

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3\\
&\qquad +\binom{n}{4}a^{n-4}b^4+\binom{n}{5}a^{n-5}b^5+\cdots
\end{aligned}
$$

$$= \quad a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}a^{n-2}b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

となること，
したがって，

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \binom{n}{5}x^5 + \cdots \\
&= 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 \\
&\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

と表されることがわかる．

ところで，この式の右辺は，$n = 3$ などの小さな n の値を代入しても，第 4 項以降は
$(n-3)$ の因数があるため 0 となり，成立する．
すなわち，この式の右辺は無限に続く式と見なしてもいつでも成立している．
つまり，
$(1+x)^0$
$(1+x)^1$
$(1+x)^2$
$(1+x)^3$
$(1+x)^4$
$\cdots$
の系列については，x の整級数（無限級数）に展開されていると見ることができる．
そこで，n の値を $n = \frac{1}{2}$ のような分数の場合や $n = -1$ ののような負の整数について
考えると，
$(1+x)^{-1}$ についても，上の式で，$n = -1$ として成立していると考えるのは自然なこ
とと思われる．
つまり，

$$\begin{aligned}
(1+x)^{-1} &= \binom{-1}{0} + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \binom{-1}{3}x^3 + \binom{-1}{4}x^4 + \binom{-1}{5}x^5 + \cdots \\
&= 1 + \frac{(-1)}{1}x + \frac{(-1)(-1-1)}{2\cdot 1}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 \\
&\qquad + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^4 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)(-1-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^5 + \cdots \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

となることがわかる．(もう少し詳しい議論は，6.5 項「$(1+x)^{-1}$ と二項定理」を参照

してほしい.）
このことは，次のようにしても確かめられる.

$|x| < 1$ のとき 1 を $1+x$ で次々と割っていくと，

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & 1 & - & x & + & x^2 & - & x^3 \\ \cline{2-8}
1+x \;\big) & 1 & & & & & & \\
 & 1 & + & x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & - & x & & & & \\
 & & - & x & - & x^2 & & \\ \cline{3-6}
 & & & & & x^2 & & \\
 & & & & & x^2 & + & x^3 \\ \cline{6-8}
 & & & & & & - & x^3 \\
 & & & & & & & \cdots
\end{array}
$$

であることから，上と同様に，

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

となることが確かめられる.

これを 0 から x まで積分して，

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

これは，$\log(1+x)$ に等しいので，

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

この x に $-x$ を代入して，

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$

が得られる.
ニュートンはこれから，

$$\frac{1}{2}\{\log(1+x) - \log(1-x)\} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\{\log(1+x) + \log(1-x)\} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} - \cdots \tag{2}$$

を得た．この (1)(2) をたすと，$\log(1+x)$ が得られ，(1) から (2) をひくと，$-\log(1-x)$ が得られる．

$x = 0.1$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{\log(1+0.1)-\log(1-0.1)\} &= 0.1+\frac{0.1^3}{3}+\frac{0.1^5}{5}+\cdots \\ &= 0.1003353477310755\cdots \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{\log(1+0.1)+\log(1-0.1)\} &= -\frac{0.1^2}{2}-\frac{0.1^4}{4}-\frac{0.1^6}{6}-\cdots \\ &= -0.0050251679267507\cdots \qquad (4)\end{aligned}$$

となるので，この (3)(4) を，

たすと，

$$\log 1.1 = 0.09531017980432\cdots$$

ひくと，

$$\log 0.9 = -0.1053605156578262\cdots$$

がわかる．
同様にして，$x = 0.2$ とすると，

$$\begin{aligned}\log 1.2 &= 0.1823215567939546\cdots \\ \log 0.8 &= -0.2231435513142097\cdots\end{aligned}$$

がわかる．
これから，

$$\begin{aligned}2 &= \frac{1.2\times 1.2}{0.8\times 0.9} \\ 3 &= \frac{1.2\times 2}{0.8} \\ 5 &= \frac{2\times 2}{0.8} \\ 10 &= 2\times 5 \\ 11 &= 1.1\times 10 \\ 100 &= 10\times 10\end{aligned}$$

として，

$$
\begin{aligned}
\log 2 &= 2\log 1.2 - \log 0.8 - \log 0.9 \\
&= 2 \times 0.1823215567939546 - (-0.2231435513142097) - (-0.1053605156578262) \\
&= 0.693147180559945\cdots
\end{aligned}
$$

などと計算することができる．

4.3 指数関数と対数関数
– オイラー –

4.3.1 指数関数の登場と対数関数の定義

オイラー[9]は，1748 年に「無限解析入門」(Introductio inanalysin infinitorum) を出版している．オイラーが４１歳の時である．

このテキストは本格的な解析学を展開する前に，すなわち，微分や積分の計算を始める前に必要な関数についての知識をまとめておこうという意図でかかれたものである．このテキストによって，対数は計算術から関数としての地位を占めるようになる．

「無限解析入門」の第６章「指数量と対数」で，オイラーは明確に指数関数を扱っている．これ以前に指数関数が明確な形で歴史に登場したことはなかったという．現代では，対数関数は指数関数の逆関数として定義されることが多いが，指数関数が誕生したのは対数が誕生してからかなり後のことということになる．オイラーの仕事の前には，対数を指数関数の逆関数と見る視点はなかった．オイラーが始めて対数関数は指数関数の逆関数であると述べて定義した．

この部分を，オイラーの対数の定義を「無限解析入門」から引用する．

> ある与えられた数 a を設定しておくとき，z の任意の値を元にして，それに対応する y の値を見つけることができるのと同様に，逆に y の任意の正の値が与えられたとき，適合する z の値，すなわち $a^z = y$ となるような z の値が与えられる．この z の値は，y の関数と見る限りにおいて，y の対数という名で呼ぶ習わしになっている．だから，対数の論理では a にあてはめるべき確定した定数が，あらかじめ設定されているわけである．その定数は対数の底と呼ばれる．このように情勢を整えておくとき，数 y の対数というのは，その y に等しいべき a^z のべき指数のことにほかならない．数 y の対数は普通 $\log y$ と表記する習わしになっている．それゆえ，もし
>
> $$a^z = y$$
>
> であれば，
>
> $$z = \log y$$
>
> というふうになることになる．

このあとに，底のとりうる範囲，y のとりうる範囲について述べられている．さらに，対数の性質を導き，値の求め方を述べ，底の取り方によって無限の対数系を考えることができるが，それらのうち２種の対数系は常に同じ比率になっているという彼の「黄金

[9]レオンハル・トオイラー　Leonhard Euler 1707.4.5　スイス　バーゼル　生まれ− 1783.9.18　ロシア　ペテルスブルグ　没

則」いわゆる底の変換公式について述べている．

これらの箇所も大変興味深いが，いまは，対数の無限級数表示について紹介しよう．

4.3.2 指数関数の無限級数展開

現代では，対数の無限級数表示をする場合は，微分積分学の成果であるテーラー展開を使って表すのが一般的だと思われるが，オイラーはここでは，まだ微分も積分も使わず,「無限解析 $\cdots$」の名にふさわしく「無限大」と「無限小」を器用に使い分けて対数の無限級数展開を実現する．そればかりではなく,「無限解析入門」の中では，指数関数，三角関数が無限級数に展開され，一見無関係と思われる関数の間の本質的関係[10]が明らかにされる．

オイラーの指数関数，対数関数の無限級数展開は次のようにして始まる．

$a^0 = 1$，いま，$a > 1$ とする．ω を無限に小さい数とする．すると，

$$a^\omega = 1 + \psi$$

となる数 ψ が存在する．この数 ψ も無限に小さい数である．
ここで，ω と ψ を比較するとそれらは大きいか等しいか小さいかいずれかであるから，

$$\psi = k\omega$$

と置いてみよう．

$$a^\omega = 1 + k\omega$$

となる．

すなわち，無限小の数，ω と ψ の間に，一次の比例関係を想定しようというのである．

この ω は無限小数だが i を無限大数として，$i\omega$ をつくると任意の正の数 z をつくることができる．
したがって，

$$\begin{aligned}
a^z = a^{i\omega} &= (1+k\omega)^i \\
&= 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 \\
&\quad + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}k^4\omega^4 + \cdots
\end{aligned}$$

$z = i\omega$ より，$\omega = \dfrac{z}{i}$ となるので，これを代入すると，

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3$$

[10] いわゆる，オイラーの公式と呼ばれる $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ が示されている．

$$+\frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4+\cdots$$

i は無限大数なので，$\dfrac{i-1}{i},\dfrac{i-2}{i},\dfrac{i-3}{i},\cdots$ はすべて，1 に等しいので，

$$a^z = 1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \tag{5}$$

となる．
ここで，$z=1$ とすると，

$$a = 1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

となる．
このとき $k=1$ となる a の値を e と書くと，

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

$$e^z = 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

と表される．
このようにして，指数関数の無限級数表示が得られる．

4.3.3 対数関数の無限級数展開

つぎに，対数関数の無限級数表示は次のようにして得られる．

$$a^\omega = 1+k\omega$$

なので，底を a とすると，

$$\omega = \log(1+k\omega)$$

である．
一般に

$$i\omega = \log(1+k\omega)^i$$

となるが，
i として採用される数が大きければ大きいほど，$(1+k\omega)^i$ は大きくなる．i を無限大数とすると，$(1+k\omega)^i$ は 1 よりも大きい任意の数に到達する．そこで，

$$(1+k\omega)^i = 1+x$$

と置くと，

$$\log(1+x) = i\omega$$

　となる．
ところで，

$$(1+k\omega)^i = 1+x$$

と置いたのであるから，

$$(1+k\omega) = (1+x)^{\frac{1}{i}}$$

したがって，

$$\omega = \frac{1}{k}\{(1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\}$$

これより，

$$i\omega = \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$$

$$\log(1+x) = \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$$

ここで，一般二項定理を使って[11]，

$$(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \binom{\frac{1}{i}}{1}x + \binom{\frac{1}{i}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{i}}{3}x^3 + \binom{\frac{1}{i}}{4}x^4 + \cdots$$

すなわち、

$$(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{\frac{1}{i}}{1}x + \frac{\frac{1}{i}\cdot(\frac{1}{i}-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{i}\cdot(\frac{1}{i}-1)\cdot(\frac{1}{i}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{\frac{1}{i}\cdot(\frac{1}{i}-1)\cdot(\frac{1}{i}-2)\cdot(\frac{1}{i}-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1\cdot(i-1)}{i\cdot 2i}x^2 + \frac{1\cdot(i-1)\cdot(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3 - \frac{1\cdot(i-1)\cdot(2i-1)\cdot(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^4 + \cdots$$

この両辺に i をかけて，

$$i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

したがって，

$$\log(1+x) = \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k} = \frac{1}{k}(i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots) - \frac{i}{k}$$

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots)$$

[11]一般二項定理については，6.5 章　「$(1+x)^{-1}$ と二項定理」 の項参照

となる．
このとき，k を 1 とする値は，

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

この値は計算してみると，$2.71828182845\cdots$ となる値である．
すると，底を e とする対数では，$k = 1$ となるので，

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

となり対数の無限級数表示を得ることができた．

この級数は 0 の近くで急速に収束する．
そのため，一定の工夫をすると，任意の値の対数を苦もなく計算して求めることができる．（6.4 オイラーによる対数の値の計算　を参照）

さらにオイラーは，$\sin z, \cos z$ の関数を級数展開することによって，e^z との関連を明らかにし，対数がこれらの関数の中心に存在することを明らかにした．

5　対数の発展

5.1　負の数の対数　$\log(-1)$

1700 年代の始め，負の数の対数とはなんなのかが問題になった．すなわち，$\log(-1)$ は何を表すのか．$\log(-2)$ は何を表すのかという問題である．これは，主にライプニッツとヨハン・ベルヌーイの間で論じられたという．この問題は，最後にオイラーがでてきて決着が付いたということである．

ベルヌーイは $\log x$ を微分しても，$\log(-x)$ を微分しても同じなので，$\log x = \log(-x)$ であり，$\log 1 = \log(-1) = 0$ であると主張した．　一方，ライプニッツは $\log(-1)$ は，実数の値を取り得ない，なぜなら，$\log(-1)$ が正の数だとすると，-1 は 1 より大きくなるし，$\log(-1)$ が負の数だとすると，-1 は 0 と 1 の間の数になってしまうからであると主張したという．

これに対しオイラーは，１７２７年頃には

「$z = xx$ とすると，$\sqrt{xx}$ は x と $-x$ である．したがって，$\dfrac{1}{2}\log z$ は $\log x$ と $\log(-x)$ になるのではないか」と述べている．さらに続けて，

「このように，xx が２つの対数をもつということを認めるならば，その人は必ず，まだ無限に多くの対数をもっていると主張するはずである.」と述べている

いま，$z = xxxx$ とすると，$\sqrt[4]{xxxx}$ は x と ix，$-x$，$-ix$ である．したがって，$\dfrac{1}{4}\log z$ は $\log x$，$\log(ix)$，$\log(-x)$，$\log(-ix)$ になる．

さらにこの後，１７４９年には，対数は無限に多くの値をもつこと，無限多価性をもつことをはっきり述べている．

現代風の書き方で表すと，

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると，

$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

となり，対数は，複素変数の複素数に値をとる関数ととらえれば，正の数に限っても，その値は無限に多くの値をとることを示した．

このことが確認できれば，

$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ なので，

$\log 1 = 2n\pi i \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

となり，正の数の対数の値も $2\pi i$ の整数倍の差で，無限に多くの値をとることになる．

論争の火種となった $\log(-1)$ の値は，

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

なので，

$$\log(-1) = i(\pi + 2n\pi) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

となる．

このことについてのオイラーの議論は 6.6 項「対数の無限多価性」に載せてあるので，参照してほしい．

　オイラーは，さらに１７４６年には，ゴールドバッハ宛の手紙の中で，

$$i^i$$

すなわち，

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

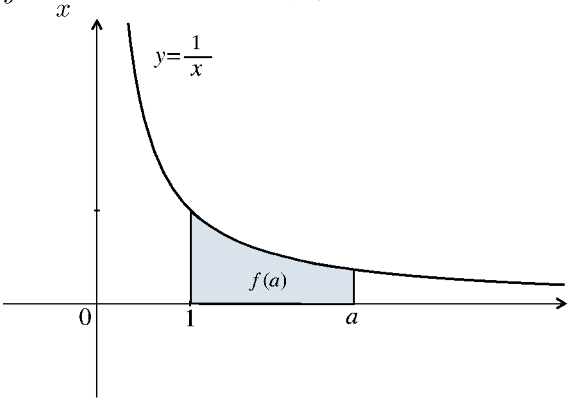
について述べている．

　とうとう，対数はその変数を複素数にまで拡大したのである．
しかし，１７００年代のこの当時，複素数はまだ数学の中で市民権を得られていなかった．
１８００年代になり，ガウスは複素関数についてかなりの研究を積んでいたが，ガウスは慎重で，なかなか，その研究を公のものにしようとしなかった．ガウスは１８１１年にはベッセルに宛てて $li(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\log x} dx$ について書いていて，複素平面上で積分を考え，任意の複素数 z に対して，$li(z)$ を考察している．

5.2　複素積分と対数

１８００年代に入り，複素関数論はコーシー，ワイエルシュトラス，リーマンに受け継がれて急速に発展を遂げた．対数も，その中で，複素平面で定義された関数 $\dfrac{1}{z}$ をある複素平面上の道を通って1から z まで積分したものであることが明らかになった．その複素積分のあらましをたどってみよう．

先に，関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと x 軸ではさまれる部分の面積に注目する．すなわち，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと x 軸と直線 $x=1$ と $x=a$ に囲まれる部分の面積を，$f(a)$ とする．



すると $\log x=f(x)$ となることを示した．このとき，ヴィンセントは x 軸上に等比数列をなす点を取ったが，この点は等比数列や等差数列をなすことが本質的ではなく，点で区切られた区間がいくらでも細かくすることができることが重要であった．その点列を $\{x_0=1,x_1,x_2,\cdots,x_n=x\}$ として，各区間，$[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ に $x_1^*,x_2^*,x_3^*,\cdots,x_n^*$ をとり，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^*}(x_i-x_{i-1})$ をつくると，これは，ほぼ $x=1$ から x までの $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフの下にできる部分の面積に等しいので，分割の数 n を大きくすると同時に，すべての区間 $[x_i,x_{i-1}]$ がどこまでも小さくなって行けば，完全に面積そのものに一致する．すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^*}(x_i-x_{i-1})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_1^x\frac{1}{x}dx=\log x$$

となる．

これを，複素平面上の点 z で定義された関数 $w=f(z)$ について，x 軸の代わりに，複素平面上のある曲線（積分の道）について同様のことを行うのが，複素積分である．

複素平面上のある曲線 C が，

$$C: z=z(t)\quad(\alpha\leqq t\leqq\beta)$$

で表されるとしよう．

t の変域 $[\alpha,\beta]$ を

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

によって，n 個の小区間 $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ に分割し，
各小区間 $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ に属する任意の点 τ_ν を取り，

$$z_\nu = z(t_\nu), \zeta_\nu = \zeta(\tau_\nu)$$

とおく．
このとき，

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1})$$

をつくり，小区間 $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ がどこまでも小さくなるように分割の数 n を大きくするとき近づいて行く値を複素積分

$$\int_C f(z)dz$$

と考える．

すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1}) = \int_C f(z)dz$$

である．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)\frac{(z_\nu - z_{\nu-1})}{(t_\nu - t_{\nu-1})}(t_\nu - t_{\nu-1}) = \int_C f(z)\frac{dz}{dt}dt$$

であるから，

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)\frac{dz}{dt}dt$$

とも表すことができる．

このことを使って．$f(z)$ が原始関数 $F(z)$ を持つならば，積分の道に関係なく複素積分の値が決まる．つまり，

$$F'(z) = f(z)$$

このとき，曲線

$$C : z = z(t) \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

をとれば，

$$\int_C f(z)dz = \Big[F(z)\Big]_{z(\alpha)}^{z(\beta)}$$

となることが，次のようにしてわかる．

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)\frac{dz}{dt}dt$$

ところで，t が実数であれば，$\dfrac{d}{dt}F(z(t)) = f(z(t))\dfrac{dz}{dt}$ が成立する，また，実数区間 $[\alpha, \beta]$ に対して，$f(x)$ が複素数値をとる関数であっても，$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta$ が成立するので，

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z)\frac{dz}{dt}dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(z(t))dt = \Big[F(z(t))\Big]_\alpha^\beta \\ &= F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = \Big[F(z)\Big]_{z(\alpha)}^{z(\beta)}\end{aligned}$$

となる．すなわち，始点と終点の値が決まると複素積分の値が決まることになる．

ここまでくると，積分路 C を原点を中心とする半径 r の円

$$z = re^{it} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

とするとき，

$$\int_C \frac{1}{z}dz$$

を計算することができる．
$z = re^{it}$　なので，　$\dfrac{dz}{dt} = ire^{it}$
したがって，

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z}\frac{dz}{dt}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

このように，関数 $\dfrac{1}{z}$ は左回りに一周して積分するたびに $2\pi i$ 増えることになる．

さらに，コーシーは，$f(z)$ が領域 D で微分可能（正則関数）であれば，D 内の閉曲線 C が連続的に変形して D 内の閉曲線 C' に重ねることができるのなら，

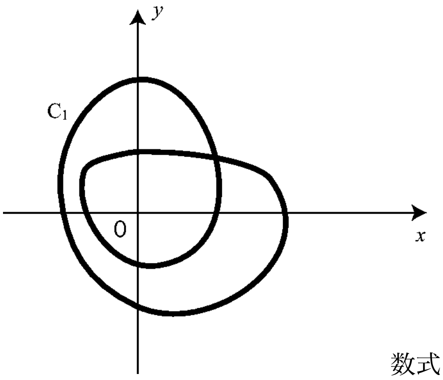
$$\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz$$

であることを示した．

そうすると，$\dfrac{1}{z}$ は微分可能でない原点を除く領域 D で，半径 r の円に限らず，これと，連続的に変形可能な曲線であれば，その曲線に沿って積分すると同じ値になることがわかる．

すなわち，n 回原点の周りを回る閉曲線 C_1 に沿って $\dfrac{1}{z}$ を積分すると，その値は

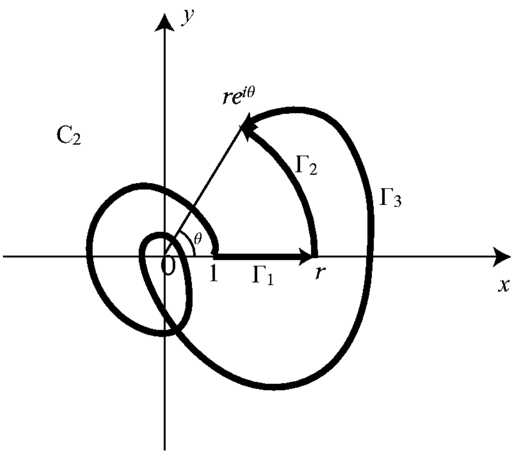
$n \times 2\pi i = 2n\pi i$ であることがわかる．



数式で表すと，

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = 2n\pi i.$$

いま，C_1 を連続的に変形して得られる次のような曲線を考える．
実軸上を 1 から r まで進む直線を Γ_1，r から $z = re^{i\theta}$ までを原点を中心とする半径 r の円の上を進む曲線を Γ_2 とする．
また，実軸上の 1 から原点の周りを n 回まわって $z = re^{i\theta}$ に到達する曲線を Γ_3 とする．
これらを $\Gamma_3 + (-\Gamma_2) + (-\Gamma_1)$ とつなげた閉曲線を C_2 とすると，この曲線は C_1 を連続的に変形して得られる曲線である．



したがって，

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z} dz = 2n\pi i$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \frac{1}{z} dz &= \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} dz - \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz \\
&= \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz - \int_0^\theta \frac{1}{z} \frac{dz}{dt} dt - \int_1^r \frac{1}{x} dx \\
&= \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz - \int_0^\theta \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} dt - \int_1^r \frac{1}{x} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz - \int_0^{\theta} i dt - \int_1^r \frac{1}{x} dx \\
&= \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz - i\theta - \log r \\
&= 2n\pi i
\end{aligned}
$$

これより，

$$
\int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz = \log r + i\theta + 2n\pi i
$$

となる．

　ここまでくると，対数は，$\dfrac{1}{z}$ の積分としてその姿を現している．
しかも，負の数の対数は実数の中では原点 0 を通過できないため，その意味が明確でなかったものが，変域を複素数に拡張することによって，原点 O を回避し，負の数に到達することができるようになった．しかし，その積分の道はあまりにも自由で，特異な点 O の周りを何回まわるかによって無限に異なる値を示すことになった．対数関数の無限多価性の意味が明確にその姿を現したのである．

参考文献

志賀　浩二　数の大航海　日本評論社

氏家　英夫　「量の解析に基づく指数対数関数の指導」
　　　　　　北海道地区数学教育協議会高校サークル　ブックレット N0.2

渡邉　勝　　「対数関数の応用例」
　　　　　　北海道地区数学教育協議会高校サークル　レポート

真鍋　和弘　「７で始まる数」
　　　　　　北海道地区数学教育協議会高校サークル　レポート

真鍋　和弘　「１で始まる数が多いのはなぜか」
　　　　　　札幌子育て教育文化フェスティバル　ワンデースクール

W．ダンハム　オイラー入門　シュプリンガー・フェアラーク

Ｅ．ハイラー，Ｇ．ワナー　　解析教程　シュプリンガー・フェアラーク

レオンハルト・オイラー　オイラーの無限解析　高瀬正仁訳　海鳴社

志賀　浩二　数学が育って行く物語　第２週　解析性　岩波書店

田村　二郎　解析関数　裳華房

Ｈ．カルタン　複素関数論　岩波書店

6　資料 1

6.1　ー指数現象と対数メガネー

6.1.1　指数現象と対数

新聞紙を半分、また半分 ⋯ と折り畳んでいく。100 回折りたためたら、どのくらいの高さになるか。

予想　ア　人間の背の高さくらい

　　　イ　校舎の高さくらい

　　　ウ　東京タワーの高さくらい

　　　エ　富士山の高さくらい

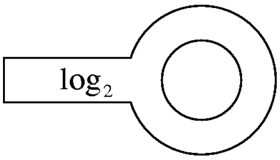
　　　オ　月までとどく

　　　カ　宇宙のはて

質問　1 分間で 2 倍になるバクテリアがコップの中にある。　分裂をはじめて 1 時間後にコップがバクテリアでいっぱいになったとすると、コップの半分になったのは分裂をはじめて何分後か。

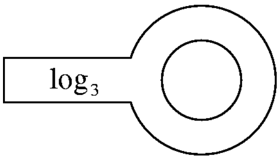
このように人間にとって指数現象というものは大変わかりづらく、予想もしにくい。そこで人間は指数現象を見る便利なメガネとして対数 log というものを発明した（発明したのはネピアという人で 1641 年のこと）。

log のメガネ



のメガネで 32 を見ると　5 に見える
8 を見ると　3 に見える

では 16 を見ると
64 を見ると
2 を見ると



のメガネで 9 を見ると
27 を見ると
81 を見ると

$\log_a$ のメガネの働きは

問題　次の値を求めよ

(1) $\log_2 128$

(2) $\log_3 243$

(3) $\log_{10} 1000$

(4) $\log_5 125$

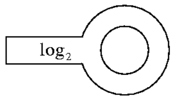
(5) $\log_3 3$

(6) $\log_7 1$

(7) $\log_3 \dfrac{1}{27}$

(8) $\log_2 \dfrac{1}{32}$

6.1.2　対数表

$x = 2^n$ に対応させて y として 

のメガネで見える値を書きなさい。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\log_2 x$			0											

このような表を 2 を底とする対数表という。対数表を使うと、x のかけ算を $\log_2$ どうしのたし算で計算できる。このことがコンピュータのない時代の計算を簡単にするのに大変役に立ち、天文学者の寿命をのばしたと言われている。

ex.

	8	$\times$	16	$=$			を求める
	↓		↓		↑		
$\log_2$ で見ると	3	$+$	4	$=$	7		

わり算はどうか

	256	$\div$	32	$=$			を求める
	↓		↓		↑		
$\log_2$ で見ると	8	$-$	5	$=$	3		

問題　対数表をつかって、次の計算をしなさい。

(1) $64 \times 32 =$　　(2) $16 \times 16 =$　　(3) $2048 \div 128 =$

(4) $512 \times \frac{1}{16} =$　　(5) $4 \div \frac{1}{8} =$　　(6) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} =$

対数の規則

$\log_2$ の対数表で行ったことを $\log_a$ の対数表をつかって一般化する。

x	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	$M = a^m$	$N = a^n$	$MN = a^{m+n}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\log_a x$	-2	-1	0	1	2	$m = \log_a M$	$n = \log_a N$	$m+n = \log_a MN$

$a^2 \times a^3$ のように真数のかけ算は対数のたし算に対応している。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

のとき $a^m = M \quad a^n = N$ とおくと

I $\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$

また、

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

だから、

II $\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$

また、

$$\begin{aligned} \log_a M^n &= \log_a (M \times M \times M \times \cdots \times M) \\ &= \log_a M + \log_a M + \log_a M + \cdots + \log_a M \\ &= n \log_a M \end{aligned}$$

だから、

III $\boxed{\log_a M^n = n \log_a M}$

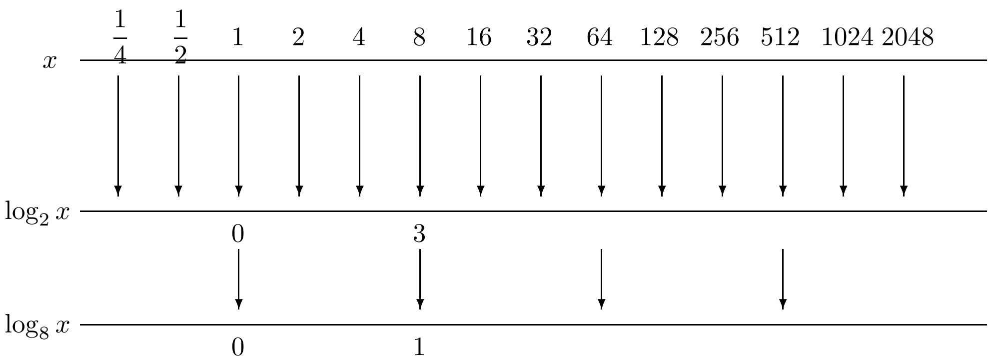
問題　次の計算をしなさい。

(1) $\log_2(512 \cdot 64)$　　(2) $\log_2(1024 \div 32)$

(3) $\log_3(27 \cdot 243)$　　(4) $\log_2 16^3$

6.1.3　底の変換

同じ $x = 2^n$ を底の異なる $\log_2$ のめがねと $\log_8$ の、めがねで見た対数表をつくると



これを見ると底の異なる log のめがねで見た対数表どうしは（底が大きくなれば値が小さくというように）互いに比例している。
この関係をつかえば $\log_8 x$ のあいている値も簡単にもとめられる。
底を 2 から 8 に変える場合、$\log_2 x$ の値に $\dfrac{1}{3}$ をかければ良い。この 3 という値は $\log_2$ のめがねで 8 を見た値。

つまり $\log_8 x = \dfrac{1}{\log_2 8} \times \log_2 x$ という関係になっている。
一般に底を b から a に変えるためには

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \times \log_b x$$

とすればよい。
つまり、
$\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$ これを底の変換公式という。

この関係を使えば、ひとつくわしい対数表があればすべての対数を求めることができる。

例　$\log_8 256 =$ ________________ $=$

練習　底の変換公式を用いて。次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_8 128$　　(2) $\log_4 1024$

(3) $\log_{27} 243$　　(4) $\log_9 27$

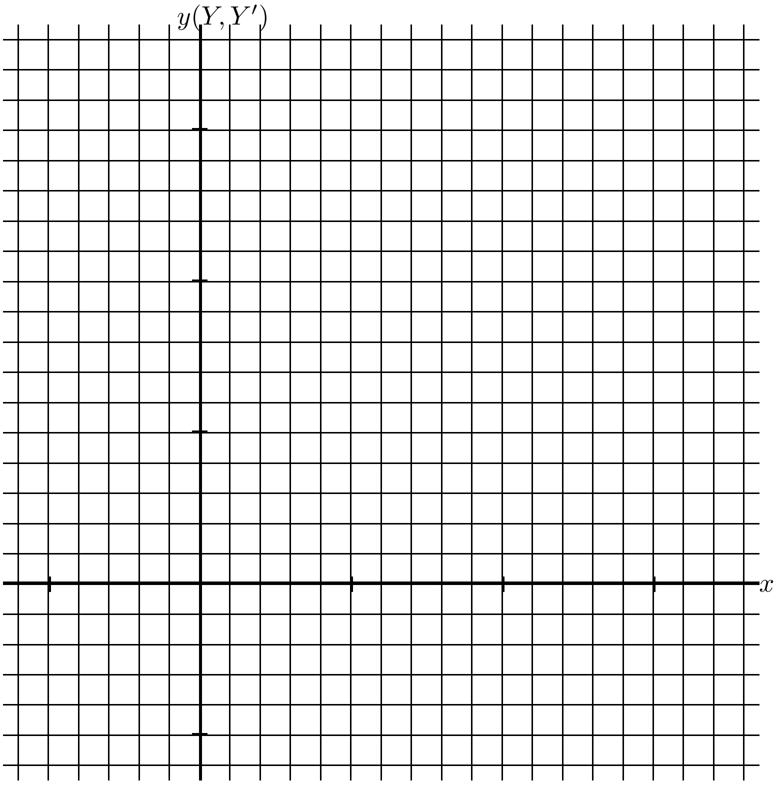
　世の中ではこのひとつのくわしい対数の表として、１０を底とする $\log_{10} x$ の対数表をよく用いる。この１０を底とする対数を常用対数という。
教科書の後ろに小数以下４ケタの常用対数表がのっている。

6.1.4　片対数グラフ

1時間で2倍になるバクテリア1 g がある。この x 時間後の重さを y g とするとその変化は $y = 2^x$ と表せる。
作業1　表の　$y = 2^x$ の欄に数を書き入れ、下のグラフ用紙に $y = 2^x$ のグラフを書きなさい。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = 2^x$											
$Y = \log_{10} y$											
$Y' = \log_2 y$											

作業2　表の下の段の Y の欄にこの y の値を $\log_{10}$ のメガネで見た Y の値を書き入れ、同じグラフ用紙にこの $Y = \log_{10} y$ のグラフを書きなさい。
作業3　こんどは、y の値を $\log_2$ のメガネで見た Y' の値を書き入れ、この $Y' = \log_2 y$ のグラフを書きなさい。



このように一定の倍率で変化する指数現象を log のメガネで見ると log の底にかかわらずそのグラフは、$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ なる。
そこで、log をつかうと非常に大きな量になるものをあつかいやすくなる。
例えば音の強さはもともとはそのエネルギーで表され非常に大きな数になる。音の強さ

の単位として用いられる dB は音のエネルギーを $\log_{10}$ のメガネで見た単位である。

いちいち対数表からグラフを作るのは大変なので、世の中にはあらかじめ縦軸 Y を対数目盛で目盛ってあるグラフが売っている。これを片対数グラフ用紙あるいは半対数グラフ用紙と呼ぶ。(大きな文房具店で売っている)

作業４　この片対数グラフに $y = 2^x$ のグラフを書きなさい。

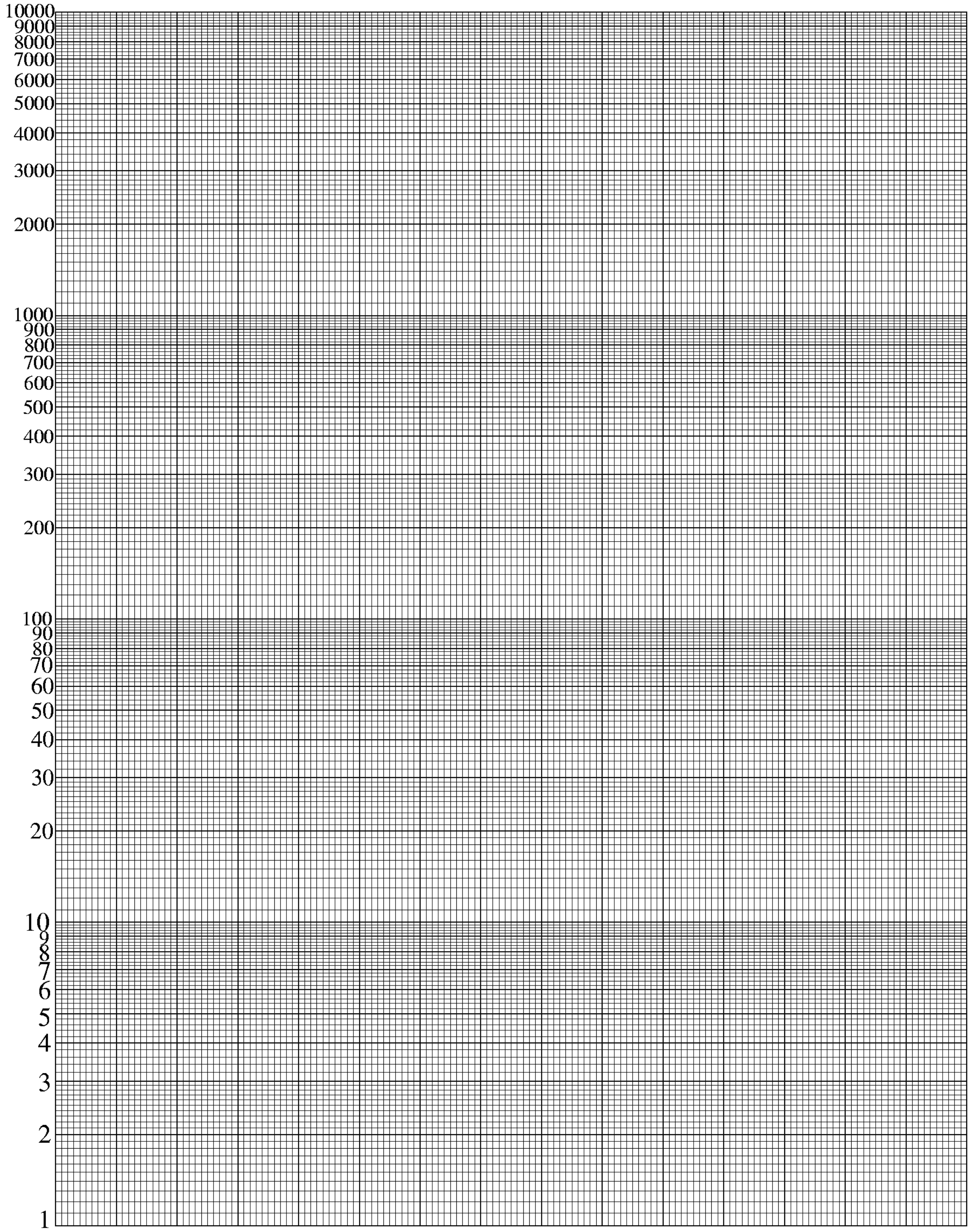
このように同じ倍率で変化していれば、片対数グラフの上では $\boxed{\qquad\qquad}$ になる。

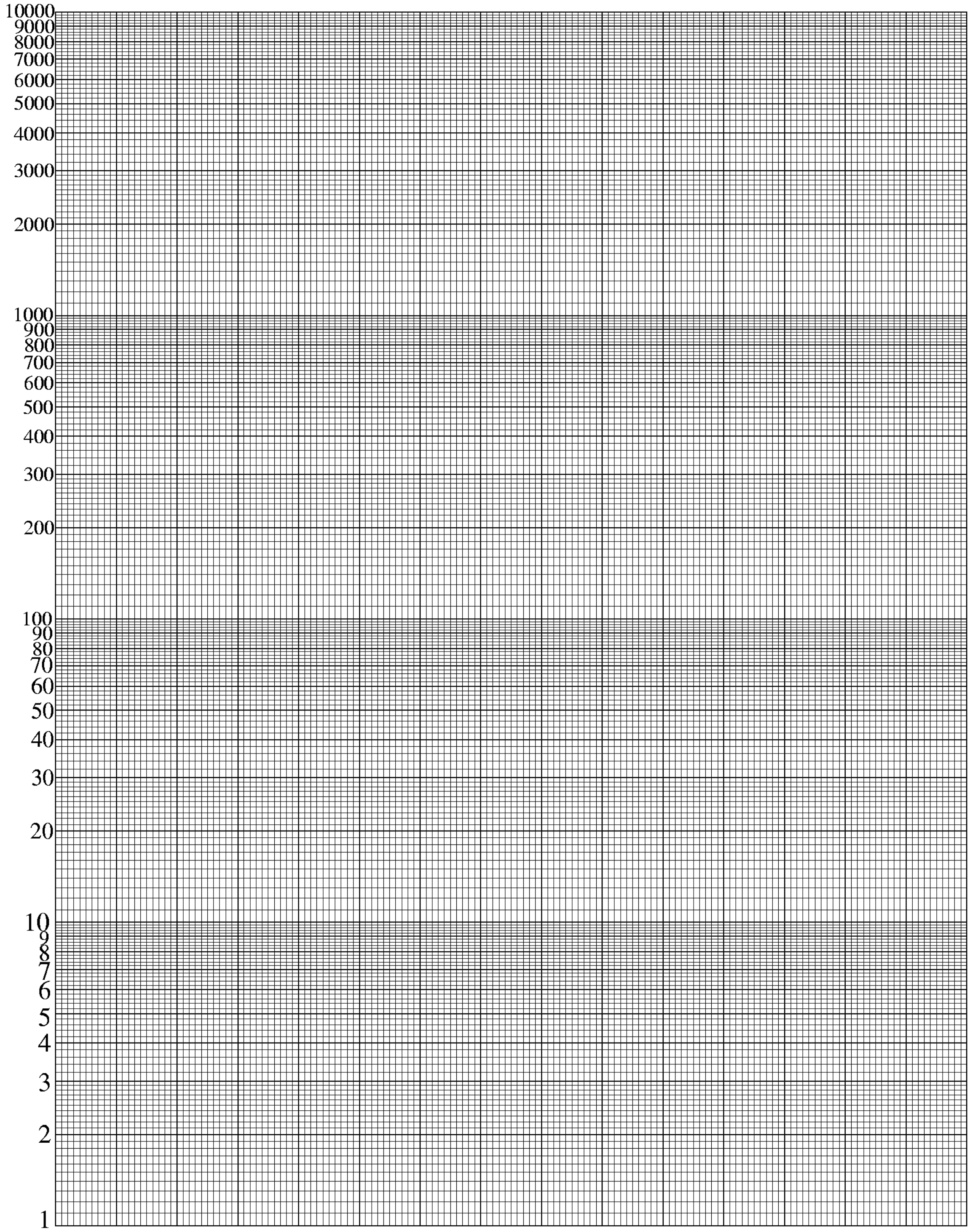
社会の現象では、物価指数とか給与の伸び率とか経済の成長率というように、もとの数値の変化よりも倍率変化が問題になることが多い。

作業５　次の表は 1955 年以降の日本の自動車生産台数の表である。この変化の様子を片対数グラフに書いて、日本の自動車生産台数の成長の変化を調べなさい。

年	生産台数 (万)
1955	7
56	11
57	18
58	19
59	26
1960	48
61	81
62	99
63	128
64	170
1965	187
66	229
67	315
68	409
69	468
1970	523
71	581

年	生産台数 (万)
72	629
73	708
74	655
1975	694
76	784
77	852
78	927
79	964
1980	1104
81	1118
82	1073
83	1111
84	1147
1985	1227
86	1226
87	1225


10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1


10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

6.2　ネピアの対数表計算

$a_n = 10^7(1-\frac{1}{10^7})^n$ とすれば,
本文中に述べた方法によって計算し,
$a_{100} = 9999900.0004950$ となる．この値はほぼ
$9999900 = 10000000(1-\frac{1}{10^5}) = 10^7(1-\frac{1}{10^5})$ に近い.
そこで，$10^7(1-\frac{1}{10^5})^k$ を $k=1$ から $k=51$ まで計算する.

$10^7(1-\frac{1}{10^5})$	9999900 . 0000000
	99 . 9990000
$10^7(1-\frac{1}{10^5})^2$	9999800 . 0010000
	99 . 9980000
$10^7(1-\frac{1}{10^5})^3$	9999700 . 0029999
	99 . 9970000
	⋯
	⋯
	⋯
$10^7(1-\frac{1}{10^5})^{50}$	9995001 . 2248040
	99 . 9500122
$10^7(1-\frac{1}{10^5})^{51}$	9994901 . 2747918

すると，この値はほぼ,
$9995000 = 10000000(1-\frac{5000}{10000000}) = 10^7(1-\frac{1}{2000})$ に近い.

そこでさらに，$10^7(1-\frac{1}{2000})^k$ を $k=0$ から $k=20$ まで計算する.
すると，同様の計算で,
$10^7(1-\frac{1}{2000})^{20} = 9900473.5780233$ となり,
$9900000 = 10^7(1-\frac{1}{100})$ に近い.

ネピアは，次のような公比が $r_1 = 1-\frac{1}{2000}$ と $r_2 = 1-\frac{1}{100}$ の数列
$10^7 r_1^p r_2^q = 10^7(1-\frac{1}{2000})^p(1-\frac{1}{100})^q$ の表を考えた.

q \ p	0	1	2	⋯	69
0	10000000.0000000	9900000.0000000	9801000.0000000	⋯	5048858.8878707
1	9995000.0000000	9895050.0000000	9796099.5000000	⋯	5046334.4584268
2	9990002.5000000	9890102.4750000	9791201.4502500	⋯	5043811.2911976
	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
20	9900473.5780233	9801468.8422431	9703454.1538206	⋯	4998609.4018532

これで，10^7 1千万とその半分５００万の間に比が一定の $21 \times 69 = 1449$ 個の数が並んだことになる．

ネピアは，これらの擬似的な等比数列の項比である $r_1 = 1 - \dfrac{1}{2000}$ と $r_2 = 1 - \dfrac{1}{100}$ に対する対数を線形補間の考え方で求めた．

まず，$a_{100} = 9999900.0004950$ なので，

9999900.0004950 の対数は 100 である．

$a_0 = 10000000.0000000$ なので，

10000000.0000000 の対数は 0 である．

したがって，$\dfrac{0-100}{10000000.0000000 - 9999900.0004950} \times 100 = 100.000495$ となり，

$10^7(1 - \dfrac{1}{10^5}) = 9999900$ の対数が 100.000495 であることが近似的に計算される．

このことから，$10^7(1 - \dfrac{1}{10^5})^{49} = 9995101.1758158$ の対数が

$100.000495 \times 49 = 4900.024255$

$10^7(1 - \dfrac{1}{10^5})^{50} = 9995001.2248040$ の対数が

$100.000495 \times 50 = 5000.024750$

であることが近似的に計算される．

これから，線形補間法で $10^7 r_1 = 10^7(1 - \dfrac{1}{2000}) = 9995000$ の対数を求めると，5001.2501600 となる．端数を切り捨てて，$10^7 r_1 = 9995000$ の対数を 5001.250 とする．

すると，上の表の $10^7(1 - \dfrac{1}{2000})^{20} = 10^7 r_1^{20} = 9900473.5780233$ の対数は

$5001.250 \times 20 = 100025$ となる．

次に，上の表の $p = 1, q = 1$ の値 9895050.0000000 は，

$9895050.0000000 = 10^7(1 - \dfrac{1}{2000})(1 - \dfrac{1}{100})$ となり，ほぼ，

$9895523.3412343 = 10^7(1 - \dfrac{1}{2000})^{21}$ に等しいので，

$9895523.3412343 = 10^7(1 - \dfrac{1}{2000})^{21} = 10^7(1 - \dfrac{1}{2000})^{20} \times (1 - \dfrac{1}{2000})$ の対数は

$100025 + 5001.25 = 105026.25$ となる．

これから線形補間法によって，9900000 の対数は 100503.458 となる．

これで，上の表のすべての数に対する対数が計算できることになる．

すなわち，

$10^7(1 - \dfrac{1}{2000})^p(1 - \dfrac{1}{100})^q$ の対数は，$5001.250 \times p + 100503.458 \times q$ で計算できることになる．

同様にして，5000000（５００万）の対数は 6931472 であることがわかるので，数値が半分になるたびに，対数は 6931472 増加することがわかるため，１０００万から５００万の間の数の対数がわかると，５００万以下の数の対数もわかることになり，すべての数の対数を知ることができることになる．

6.3 ブリッグスの方法による $\log_{10} x$ の値ー体験編ー

せっかくブリッグスの常用対数表の求め方がわかったので，ここで，演習として，$\log_{10} 3$，$\log_{10} 4$，$\log_{10} 5$，$\log_{10} 6$，$\log_{10} 7$，$\log_{10} 8$，$\log_{10} 9$，$\log_{10} 10$ の値を求めてみよう．
平方根を求めるのが至難の業なので，現代の私たちは，電卓を使うことにしよう．
まずは，$\log_{10} 3$
最初に準備として，10 の 2^n 乗根を計算しておく．これは，先に掲げた A_n の表と同じであるが，これを 8 桁電卓で計算しようというのである．
では，10 を電卓に表示して，$\sqrt{\quad}$ キーを押す．押すたびに 10 の 2^n 乗根が得られる．

$$
\begin{aligned}
A_1 = \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} &= 3.1622776 \\
A_2 = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{4}} &= 1.7782793 \\
A_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{8}} &= 1.3335213 \\
A_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} = 10^{\frac{1}{16}} &= 1.1547819 \\
A_5 = 10^{\frac{1}{32}} &= 1.0746077 \\
A_6 = 10^{\frac{1}{64}} &= 1.0366328 \\
A_7 = 10^{\frac{1}{128}} &= 1.0181516 \\
A_8 = 10^{\frac{1}{256}} &= 1.0090349 \\
A_9 = 10^{\frac{1}{512}} &= 1.0045072 \\
A_{10} = 10^{\frac{1}{1024}} &= 1.002251 \\
A_{11} = 10^{\frac{1}{2048}} &= 1.0011248 \\
A_{12} = 10^{\frac{1}{4096}} &= 1.0005622 \\
A_{13} = 10^{\frac{1}{8192}} &= 1.000281 \\
A_{14} = 10^{\frac{1}{16384}} &= 1.0001404
\end{aligned}
$$

つぎに，3 を電卓に表示して，$\sqrt{\quad}$ キーを押して 3 の 2^n 乗根を計算する．

$$
\begin{aligned}
B_1 = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} &= 1.7320508 \\
B_2 = \sqrt{\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{4}} &= 1.316074 \\
B_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = 3^{\frac{1}{8}} &= 1.1472026
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}} = 3^{\frac{1}{16}} &= 1.0710754 \\
B_5 = \quad 3^{\frac{1}{32}} &= 1.0349277 \\
B_6 = \quad 3^{\frac{1}{64}} &= 1.0173139 \\
B_7 = \quad 3^{\frac{1}{128}} &= 1.0086197 \\
B_8 = \quad 3^{\frac{1}{256}} &= 1.0043006 \\
B_9 = \quad 3^{\frac{1}{512}} &= 1.0021479 \\
B_{10} = \quad 3^{\frac{1}{1024}} &= 1.0010733 \\
B_{11} = \quad 3^{\frac{1}{2048}} &= 1.0005365 \\
B_{12} = \quad 3^{\frac{1}{4096}} &= 1.0002682 \\
B_{13} = \quad 3^{\frac{1}{8192}} &= 1.000134
\end{aligned}
$$

となる．
８桁電卓で有効数字を確保するために，n の値を 14 とし，
$A_{14} = 1.0001404$ と $A_{13} = 1.000281$ の間に飛び込む B_m を探すと，$m = 12$ で，
$B_{12} = 1.0002682$ となる．
したがって，$b = B_{12} - 1 = 0.0002682$ となる．
a は $a = A_{14} - 1 = 0.0001404$ なので，$\dfrac{b}{a} = 1.9102564$ となる．
$\beta_{12} = \alpha_{14} \times \dfrac{b}{a} = (\dfrac{1}{2})^{14} \times 1.9102564$ となるが，ここで計算を保留して，
$\log_{10} 3$ を求める式を計算すると，

$\log_{10} 3 = \beta_{12} \times 2^{12}$ なので，
$\log_{10} 3 = \beta_{12} \times 2^{12} = (\dfrac{1}{2})^{14} \times 1.9102564 \times 2^{12} = 1.9102564 \times (\dfrac{1}{2})^2 = 0.4775641$ となる．

ここまでで，$\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ の値がわかったので，$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2\log_{10}$，$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$，$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$，$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 2$，$\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2\log_{10} 3$ なので，$\log_{10} 7$ がわかると，10 までの対数の値がわかる．
$\log_{10} 7$ の値を同様の手順で計算してみて欲しい．

$\log_{10} x$	$\log_{10} 1$	$\log_{10} 2$	$\log_{10} 3$	$\log_{10} 4$	$\log_{10} 5$
値	0	0.301	0.477	0.602	0.699
$\log_{10} x$	$\log_{10} 6$	$\log_{10} 7$	$\log_{10} 8$	$\log_{10} 9$	$\log_{10} 10$
値	0.778	0.845	0.903	0.954	1

6.4　オイラーによる対数の値の計算

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

また，底を e とする対数では，

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

となる．

ここで，x を負と見ると，

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x} = 2\Big(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\Big)$$

ここで，任意の正の数 a に対して，

$$\frac{1+x}{1-x} = a$$

となる x は，

$$x = \frac{a-1}{a+1}$$

で得られるので，任意の数の対数が簡単に得られる．しかし，オイラーは，ここで，まず，$x = \dfrac{1}{5}$ としている．

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

なので，

$$\log\frac{3}{2} = \frac{2}{1\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \cdots$$

同様に，$x = \dfrac{1}{7}$ として，

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

なので，

$$\log\frac{4}{3} = \frac{2}{1\cdot 7} + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \cdots$$

同様に，$x = \dfrac{1}{9}$ として，

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

なので，

$$\log\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \cdots$$

として値を求めている．その後，

$$\begin{aligned}\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3} &= \log 2\\ \log\frac{3}{2}+\log 2 &= \log 3\\ 2\log 2 &= \log 4\\ \log\frac{5}{4}+\log 4 &= \log 5\\ \log 2+\log 3 &= \log 6\\ 3\log 2 &= \log 8\\ 2\log 3 &= \log 9\\ \log 2+\log 5 &= \log 10\end{aligned}$$

として，$\log 7$ 以外の値を求めている．$\log 7$ については，$x=\dfrac{1}{99}$ として，

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{99}}{1-\frac{1}{99}}=\frac{98}{100}=\frac{49}{50}$$

なので，

$$\log\frac{49}{50}=\frac{2}{1\cdot 99}+\frac{2}{3\cdot 99^3}+\frac{2}{5\cdot 99^5}+\frac{2}{7\cdot 99^7}+\cdots$$

として値を求め，

$$\log 50=2\log 5+\log 2$$

の値から引くと $\log 49$ の値が得られ，それを半分にして $\log 7$ の値を求めている．
オイラーは，この級数を，$\cdots+\dfrac{x^{35}}{35}$ の項まで計算し，小数点以下 25 桁まで正確な数値を求めている．
$\log 2 = 0.6931471805599453094172321$
$\log 3 = 1.0986122886681096913952452$
$\log 4 = 1.3862943611198906188344642$
$\log 5 = 1.6094379124341003746007593$
$\log 6 = 1.7917594692280550008124774$
$\log 7 = 1.9459101490553133051053527$
$\log 8 = 2.0794415416798359282516964$
$\log 9 = 2.1972245773362193827904905$
$\log 10 = 2.3025850929940456840179915$

こうして得られる対数の値は，底が e なので，底が 10 の常用対数に直すためには，現代の記号を使えば，一般の底 a では，

$$\log_a(1+x)=\frac{1}{k}(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots)$$

となり，底を e とする対数では

$$\log_e(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

となる．いま，$1+x=a$ とすると，

$$\log_a a = \frac{1}{k}\log_e a$$

すなわち，

$$\log_e a = k$$

である．この a の値は 1 以外のどんな正の数でもかまわないので，底を $a=10$ として考えると，

$$\log_e 10 = k$$

$$\log_{10}(1+x) = \frac{1}{\log_e 10}\log_e(1+x)$$

ゆえ，上で得られた数値を，$\log 10 = 2.30258509299404568401799915$ で割ると，常用対数の値が得られる．同じことであるが，
$\dfrac{1}{\log 10} = 0.43429448190325182765112891$ をかけて常用対数の値が得られる．ブリッグスの時代から見ると，対数の値を求める作業が格段に楽になっている．

6.5 $(1+x)^{-1}$ と二項定理

ニュートンは，$(1+x)^{-1}$ を多項式のわり算アルゴリズムによる無限級数展開を知っていただけでなく，$(1+x)^r$ の展開式の係数について，r が整数のときのみではなく，r が負の整数や分数のときも $(1+x)^r = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$ と，整級数に展開できること，さらに，その係数がどんな数になるのかを知っていた．
r が負の整数や分数のときに，この係数を計算する方法を，一般二項定理という．
この一般二項定理がどのように「証明」されたかを見ておきたい．

二項係数について

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 &= a^4+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{aligned}$$

このように，パスカルの三角形とよばれるおもしろい数の並びが現れることは，パスカル以前にもわかっていた．

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

しかし，この数の並びの隣の数との比に着目すると，

$$\begin{array}{c}
1 \\
\frac{2}{1} \quad \frac{1}{2} \\
\frac{3}{1} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{3} \\
\frac{4}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} \\
\frac{5}{1} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \\
\frac{6}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{6} \\
\frac{7}{1} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{1}{7}
\end{array}$$

となることを，パスカルは明確に述べている．

これが常に正しいとすると，たとえば，$(a+b)^7$ の展開において，a^3b^4 の項の係数を

求めようとする場合，a^3b^4 は展開式の第４番目の項なので，その係数は

$$1 \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3}$$

のように，１に３つの比をかけて得られることがわかる．

$$1 \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

なので，

$$(a+b)^7 = a^7 + \frac{7}{1}a^6b + \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}a^5b^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}a^4b^3 + \cdots$$

となることがわかる．

$$\begin{aligned}
1 &= \binom{7}{0} \\
1 \times \frac{7}{1} = \frac{7}{1} &= \binom{7}{1} \\
1 \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} &= \binom{7}{2} \\
1 \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} &= \binom{7}{3}
\end{aligned}$$

$$\cdots$$

のように表せば，
一般に，

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 \\
&\quad + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 + \binom{n}{5}a^{n-5}b^5 + \cdots \\
&= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1}a^{n-2}b^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}a^{n-3}b^3 + \cdots
\end{aligned}$$

となる．
したがって，

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \binom{n}{5}x^5 + \cdots \\
&= 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}x^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

となる．

　ところで，この式の右辺は，$n=3$ などの小さな n の値を代入しても，第 4 項以降は $(n-3)$ の因数があるため 0 となり，成立する．
すなわち，この式の右辺は無限に続く式と見なしてもいつでも成立している．

　つまり，
$(1+x)^0$
$(1+x)^1$
$(1+x)^2$
$(1+x)^3$
$(1+x)^4$
$\cdots$
の系列については，x の整級数（無限級数）に展開されていると見ることができる．
そこで，n の値を $n=\dfrac{1}{2}$ のような分数の場合の補間を考える．
このとき，$(1+x)^{\frac{1}{2}}$ についても，上の式で，$n=\dfrac{1}{2}$ として成立していると考えるのは自然なことと思われる．
どうやら，ニュートンもそのように発想したと推測される．
上の式で，$n=\dfrac{1}{2}$ とすると，

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= \binom{\frac{1}{2}}{0}+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\binom{\frac{1}{2}}{5}x^5+\cdots \\
&= 1+\frac{\frac{1}{2}}{1}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2\cdot 1}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 \\
&\qquad +\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^4+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(\frac{1}{2}-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^5+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots
\end{aligned}$$

となる．
ところで，いま，
$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\cdots$ と，整級数に展開されたと仮定する．この両辺を 2 乗して，係数を比較すると．

$$1+x=1+2ax+(a^2+2b)x^2+(2ab+2c)x^3+(2ac+b^2+2d)x^4+\cdots$$

より，

$$2a=1\ ,\ a^2+2b=0\ ,\ 2ab+2c=0\ ,\ 2ac+b^2+2d=0$$

ゆえに，

$$a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{8}\ ,\ c=\frac{1}{16}\ ,\ d=-\frac{5}{128}$$

となり，上の式が正しいことがわかる．しかしこのことは，あくまでも経験的に正しいことを示しているに過ぎない．これが，任意の有理数について正しいことが保証されなければ，その後のオイラーの対数の議論が正しいことは保証されない．
しかし一般二項定理は，１８２６年になってからアーベルによってはじめて厳密に証明されるまで，経験的に正しいものとして，おおよそ１５０年間にわたって解析学の土台をささえてきた．

6.6 オイラーによる対数の無限多価性の証明

対数の無限多価性を，オイラーは次のように示している．
ω を無限に小さい数とすると，
$\log(1+\omega)=\omega$
$\log(1+\omega)^2=2\omega$
$\cdots \log(1+\omega)^n=n\omega$
いま，x を与えられた数として，n を無限に大きい数とすると，
$x=(1+\omega)^n$ と表すことができる．
このとき，$\log x=n\omega$
すると，
$x^{\frac{1}{n}}=1+\omega$
$nx^{\frac{1}{n}}=n+n\omega$
$n\omega=nx^{\frac{1}{n}}-n$
$\log x=nx^{\frac{1}{n}}-n$
ここで，$x^{\frac{1}{n}}$ は $n=2$ であれば，$x^{\frac{1}{2}}$ は $\sqrt{x}$ と $-\sqrt{x}$ で 2 個，
$n=3$ であれば，$x^{\frac{1}{3}}$ は $\sqrt[3]{x}$ と $\alpha\sqrt[3]{x}$，$\alpha^2\sqrt[3]{x}$ で 3 個，
$n=4$ であれば，$x^{\frac{1}{4}}$ は $\sqrt[4]{x}$ と $i\sqrt[4]{x}$，$-\sqrt[4]{x}$，$-i\sqrt[4]{x}$ で 4 個の値をもつ，というように，
$x^{\frac{1}{n}}$ は n 個の値をもつ．
したがって，n を大きくすることによって，$\log x$ は無限の値をもつと，結論づけている．

それでは，正の数 x について，その無限の値はどのようなものかということについて，オイラーは次のように述べている．
$y=\log x=nx^{\frac{1}{n}}-n$ とおき，$y=nx^{\frac{1}{n}}-n$ より，
$x=1$ として，

$$
\begin{aligned}
\log 1 &= y=1x^{\frac{1}{n}}-n \\
y+n &= n\,1^{\frac{1}{n}} \\
\frac{y+n}{n} &= 1^{\frac{1}{n}} \\
1+\frac{y}{n} &= 1^{\frac{1}{n}} \\
\left(1+\frac{y}{n}\right)^n &= 1
\end{aligned}
$$

$1+\dfrac{y}{n}$ は 1 の n 乗根なので，

$$1+\frac{y}{n}=\cos\frac{2\lambda\pi}{n}+i\sin\frac{2\lambda\pi}{n}$$

n は無限大数なので，

$\cos\dfrac{2\lambda\pi}{n} = 1 \ \sin = \dfrac{2\lambda\pi}{n}$ なので，

$$1 + \frac{y}{n} = 1 + i\frac{2\lambda\pi}{n}$$

$$\frac{y}{n} = i\frac{2\lambda\pi}{n}$$

$$y = 2\lambda\pi i$$

$$\log 1 = 2\lambda\pi i$$

$$\log x = \log x \cdot 1 = \log x + \log 1 = \log x + 2\lambda\pi i$$

すなわち，

$$\log x = \log x + 2\lambda\pi i \qquad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

となり，その値は，$2\pi i$ の任意の整数倍だけ異なる無限個の値をとる関数であることを示した．

7　資料２
― 対数で遊ぶ ―

7.1　2^n の世界－７で始まる数－

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として 2^n を次々と計算していくと，

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1\\
2^1 &= 2\\
2^2 &= 4\\
2^3 &= 8\\
2^4 &= 16\\
2^5 &= 32\\
2^6 &= 64\\
2^7 &= 128\\
2^8 &= 256\\
2^9 &= 512\\
2^{10} &= 1024\\
2^{11} &= 2048\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

となるが，この先頭の数字
$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, \cdots$ に注目すると，なかなか 7 と 9 が出てこない．
どうしてこのようなことが起こるのか，また，7 や 9 は本当にいつまでも出てこないのか，また，出てくるとしたら，いつどのようにして出てくるのか，ということが疑問になる．[12]

最初に，7 について，考えることにして，初めて先頭の数字が 7 になる n を見つけることを問題にする．
2048 から始めて，,4096，8192，16384，32768，65536，131072，262144，524288，1048576，2097152，4194304，8388608，1677216，$\cdots$ ふーっ，というわけで，この方法ではいつになるかわからない．

そこで，かけ算の概数のことならば，対数にまかせよと言うわけで，対数を調べてみることにする．
対数の世界では，2^n の指数計算は，n 倍の計算になるため計算の見通しががよくなる．
つまり，

$$\log_{10} 2^n = n \log_{10} 2$$

である．しかも，$\log_{10} 2$ の値はすでに 6 章でしらべた．その値は，ほぼ，0.301 であった．

[12] この章の内容は、2003 年札幌子育て教育文化フェスティバルの連続講座、真鍋和弘「整数の世界」をもとにしている

また，??章で計算したように，$\log_{10}3$，$\log_{10}4$，$\log_{10}5$，$\log_{10}6$，$\log_{10}7$，$\log_{10}8$，$\log_{10}9$，$\log_{10}10$ のあたいは

$\log_{10}x$	$\log_{10}1$	$\log_{10}2$	$\log_{10}3$	$\log_{10}4$	$\log_{10}5$
値	0	0.301	0.477	0.602	0.699

$\log_{10}x$	$\log_{10}6$	$\log_{10}7$	$\log_{10}8$	$\log_{10}9$	$\log_{10}10$
値	0.778	0.845	0.903	0.955	1

であった．

7 で始まる数 N は，

$$\begin{aligned}\mathrm{N} &= 7**\cdots** \\ &= 7.**\cdots**\times 10^m \\ &\quad (7 \leqq 7.**\cdots** < 8)\end{aligned}$$

と表すことができるので，

$$\begin{aligned}\log_{10}\mathrm{N} &= \log_{10}(7**\cdots**) \\ &= \log_{10}(7.**\cdots**\times 10^m) \\ &= \log_{10}(7.**\cdots**) + \log_{10}(10^m) \\ &= \log_{10}(7.**\cdots**) + m \\ &\quad 0.845 \leqq \log_{10}(7.**\cdots**) < 0.903\end{aligned}$$

となる．

したがって，$\mathrm{N} = 2^n$ の場合も，
$\log_{10}\mathrm{N} = \log_{10}2^n = n\log_{10}2$
を計算して，その小数部分が
$\log_{10}7 = 0.845$ と $\log_{10}8 = 0.903$
の間に入れば，$\mathrm{N} = 2^n$ は 7 で始まる数だと考えることができる．

したがって，円周が 1 の円を考え，その周囲を，歩幅 $0.301(\log_{10}2)$ で進んで行くとき $\log_{10}7$ と $\log_{10}8$ の間にはいるのは何歩目かという問題になる．

図を見るとわかるように，$3log_{10}2$ のところでほとんど，$\log_{10}7 = 0.845$ と $\log_{10}8 = 0.903$ の間に入りそうになっているが，この値が，ピッタリ $\log_{10}8$ であるために，7 で始まる数とはなっていない．

その一つ前は $2\log_{10}2 = 0.602$ である．このあと，歩幅 $\log_{10}2 = 0.301$ はほぼ，0.3 に近い値であるため，$0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, \cdots$ と 0.1 刻みの目盛りの近くを動いて行く

ことになる．
そうして，その数値 0.301 の特徴から，0.1 ごとの刻みから， 1 歩について 0.001 すなわち，0.1 の $\dfrac{1}{100}$ しか前へ進まない．

ところで，この進み方で 10 歩進むと $0.301 \times 10 = 3.01$ であることから，整数部分を除くと 0.01 しか違わない．
つまり，この一周が 1 の円では，元の位置とほとんど違わず，元に位置から見るとわずか 0.1 の $\dfrac{1}{10}$ だけ前へ進んでいることがわかる．
図で見ると，$2\log_{10} 2$ と $12\log_{10} 2$ がほとんど同じ位置で，わずかに 0.01 だけ，$12\log_{10} 2$ が前へ進んでいる．

ここで，0.1 刻みで見ると，$\log_{10} 7 = 0.845$ より小さい数でもっとも近いのは，0.8 であり，その数にもっとも近いのは，$6\log_{10} 2 = 1.806$ である．(円周上では 0.806)
ここから 10 歩前へ進むと，0.01 前へ進むので，0.816 へやってくる．
このようにして，$\log_{10} 7 = 0.845$ と $\log_{10} 8 = 0.903$ の間に入るためには，あと 30 歩，6 歩目の 0.806 から数えれば，あと 40 歩前へ進めばよいことになる．
そのとき，$46\log_{10} 2 = 40\log_{10} 2 + 6\log_{10} 2$ の小数部分は $40 \times 0.001 + 0.806 = 0.040 + 0.806 = 0.846$ となる．

すなわち，2^{46} が最初に 7 で始まる最初に数であることがわかる．
実際に $2^{46} = 70368744177664$ であるから，たしかに， 7 で始まる数である．

ついでに言えば，さらに 10 歩進めば小数部分は 0.1 増えて，0.856 もう 10 歩進んでも，小数部分は 0.1 増えて，0.866 10 歩進んで 0.876 10 歩進んで 0.886 10 歩進んで 0.896 となるので，$2^{46}, 2^{56}, 2^{66}, 2^{76}, 2^{86}$ が 7 で始まる数となる．

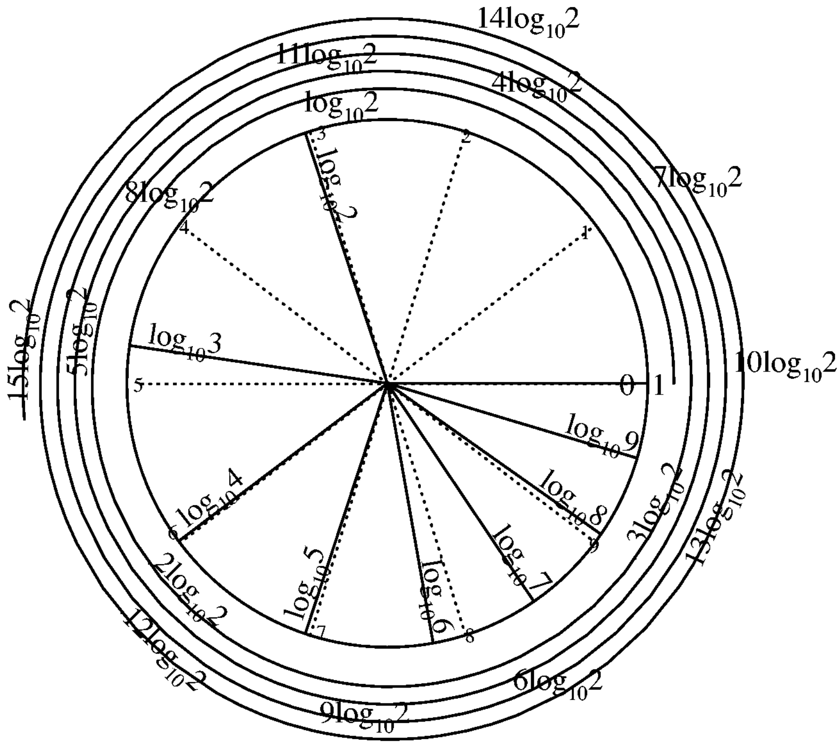
このことを数式で表すと、次のようになる。$N = a \times 10^m (a \in R, m \in N, 1 \leqq a < 1)$ とすると，

$$\begin{aligned} \log_{10} N &= \log_{10} a + m \quad (0 \leqq \log_{10} a < 1) \\ &= \{\log_{10} N\} + [\log_{10} N] \end{aligned}$$

ただし，$\{***\}$ は $***$ の小数部分を表し，$[***]$ は $***$ の整数部分を表すものとする．
例　N が 7 で始まっているとする．
　　$\mathrm{N} = (7.** \cdots **) \times 10^m$
　　$\log_{10} \mathrm{N} = \log_{10}(7.** \cdots **) + m$
　　よって，$\log_{10} 7 \leqq \{\log_{10} \mathrm{N}\} < \log_{10} 8$

［定理］N が $r \quad (r = 1, 2, 3, \cdots, 9)$ で始まるための必要十分条件は，
　　$\log_{10} r \leqq \{\log_{10} \mathrm{N}\} < \log_{10}(r+1)$

図 9: 歩幅 $\log_{10} 2$ の散歩



であることが成立する.

例

N が 1 で始まる	$\Longleftrightarrow$	$0 \leqq \{\log_{10} \mathrm{N}\} < \log_{10} 2 = 0.301$
N が 2 で始まる	$\Longleftrightarrow$	$0.301 = \log_{10} 2 \leqq \{\log_{10} \mathrm{N}\} < \log_{10} 3 = 0.477$
N が 3 で始まる	$\Longleftrightarrow$	$0.477 = \log_{10} 3 \leqq \{\log_{10} \mathrm{N}\} < \log_{10} 4 = 0.602$
		$\cdots$
N が 8 で始まる	$\Longleftrightarrow$	$0.906 = \log_{10} 8 \leqq \{\log_{10} \mathrm{N}\} < \log_{10} 9 = 0.955$
N が 9 で始まる	$\Longleftrightarrow$	$0.955 = \log_{10} 9 \leqq \{\log_{10} \mathrm{N}\} < 1$

7.2 2^n の世界ー１で始まる数ー

前の節の図 9 で見たように，１で始まる数，２で始まる数 $\cdots$ にはいる領域の広さで言うと，１で始まる数に入る領域がもっとも広いように見える．そのことを，きちんと議論するためには，円周のどの値の付近にも等しい率で $\log_{10} 2^n$ が”降り注ぐ”必要がある．

このことの証明は難しいようだが，このことの状況証拠なら，示すことができる．
実は，$\log_{10} 2^n$ の小数部分はどんな数の近くにもかならず存在することがいえる．
つまり，どんなに細かい数 α（$0 \leqq \alpha < 1$）を指定してもその数のごく近く (ε より近く) に $\log_{10} 2^n$ の小数部分 $\{\log_{10} 2^n\}$ が存在することがいえる．

そのために，最初に，$\{\log_{10} 2^n\}$ と $\{\log_{10} 2^m\}$ は n と m がことなれば必ず異なる数であることを示す．

$n \neq m$ なので，$n > m$ とする．
もし，$\{\log_{10} 2^n\} = \{\log_{10} 2^m\}$ とすると，整数 k があって，$\log_{10} 2^n = \log_{10} 2^m + k$ となる．
$n \log_{10} 2 = m \log_{10} 2 + k$
$(n-m) \log_{10} 2 = k$
$\log_{10} 2 = \dfrac{k}{n-m}$
となって，$\log_{10} 2$ は整数を整数で割ってできる数，すなわち有理数になるが，これはありえない．

なぜなら，もし，$\log_{10} 2$ が有理数だとすると $\log_{10} 2 = \dfrac{k}{l}$　（k，l は整数）と表すことができるが，このとき，$l \log_{10} 2 = k$，$\log_{10} 2^l = \log_{10} 10^k$ となるが，このことは，$2^l = 10^k$ を示し，2^l には 5 の素因数はないが，10^k には 5 の素因数があるため矛盾してしまう．
したがって，$\{\log_{10} 2^n\}$ と $\{\log_{10} 2^m\}$ は必ず異なる．

次に，どんなに細かい数 α（$0 \leqq \alpha < 1$）を指定してもその数のごく近く (ε より近く) に $\log_{10} 2^n$ の小数部分 $\{\log_{10} 2^n\}$ が存在することがいえることをしめす．

十分大きい数 N をとって，$\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ とする．
区間 $[0,1]$ を N 等分する．$\{n \log_{10} 2\}$ は無数にあるので，
1 を $\dfrac{1}{N}$ 等分した区間のうちある区間には少なくとも 2 個の $\{n \log_{10} 2\}$ が入ることになる．
これを，改めて $\{\log_{10} 2^n\}$ と $\{\log_{10} 2^m\}$ とする．
すると，$\{\log_{10} 2^n\} - \{\log_{10} 2^m\} < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ となる．

したがって，$\log_{10} 2^n - \log_{10} 2^m = \eta + k \qquad (k$ は整数，$\eta < \dfrac{1}{N})$
$n\log_{10} 2 - m\log_{10} 2 = \eta + k$
$(n-m)\log_{10} 2 = \eta + k$ となる．
この $(n-m)\log_{10} 2 = \eta + k$ をどんどん何倍かしていくと，
$(n-m)\log_{10} 2 = \eta + k$
$2(n-m)\log_{10} 2 = 2\eta + 2k$
$3(n-m)\log_{10} 2 = 3\eta + 3k$
$4(n-m)\log_{10} 2 = 4\eta + 4k$
$\cdots$
$N(n-m)\log_{10} 2 = N\eta + Nk$
で，Nk は整数なので，
$\{(n-m)\log_{10} 2\} = \eta$
$\{2(n-m)\log_{10} 2\} = 2\eta$
$\cdots$
なので，$\eta, 2\eta, 3\eta, \cdots$ は $\{n\log_{10} 2\}$ がつくる等間隔目盛りであって，
その間隔 η は，
$\eta < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ であるため，
任意の数の ε 以内に，$\{n\log_{10} 2\}$ が存在することがわかった．

このことによって，区間 $[0,1]$ に無限個の $\{n\log_{10} 2\}$ がどんな数の近くにも存在しながら，びっしりと並んでいることがわかる．
このことは，2^n の先頭の数字には，任意の数が，必ずどこかで現れることを保障することになる．すなわち，誕生日が，１２月３１日の人がいて，2^n をどこまでも計算して行くと，その先頭の数字が１２３１になっている数を必ず見つけることができることを保障している．

また，このことは，$\log_{10} 1$ から $\log_{10} 2$ に入る領域がもっとも大きいことから 2^n の形の数の中では 1 で始まるものがもっとも多いことを予想させるが，そのためには，密度について議論しなければならない．このことは，別の機会に譲ることにしたい．

7.3 地震の大きさ[6]

地震の規模を測る単位を magunitude[マグニチュード] という．記号は，M を使う．

このマグニチュードはもともとは，南カルフォルニアの地震に関して，震源から $100km$ 離れたところに置かれたある地震計の最大震幅をミクロン単位で測り，その常用対数をとったものである．

しかし，地震が起こったときに常に　このような地震計があるとは限らないので，他の地震計の記録から M を求める．

地震のエネルギーと M との関係式

E；地震波のエネルギー，単位は $\mathrm{erg} = 10^{-7}\mathrm{J}(10^{7}\mathrm{erg} = \mathrm{J})$

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5M$$

例 (1)　兵庫県南部地震；95 年 1 月 17 日；死者 6308+2，負傷者 43177 人

$\mathrm{M} = 7.2$　深度 $\mathrm{h} = 18\mathrm{km}$ であった．

エネルギー E_1 を求めよう．

(解)　$\log_{10} \mathrm{E}_1 = 11.8 + 1.5 \times 7.2 = 22.6$

$\mathrm{E}_1 = 10^{22.6}\mathrm{erg} = 10^{15.6}\mathrm{J} \approx 10^{16}\mathrm{J} = 1$ 京 J

練習 (1) 北海道南西沖地震；93 年 7 月 12 日；死者 202+28，負傷者 321 人

$\mathrm{M} = 7.8$　深度 $\mathrm{h} = 34\mathrm{km}$ であった．

エネルギー E_2 を求めよう．

[6]この節の内容は，渡邊勝　２０００年度（北海道高教組）札幌支部教育研究集会報告　「こんなの役に立つの？役立っているさ　常用対数の例」をもとにしたものである．

例 (2)　E_1 と E_2 を比較してみよう．

(解)　$\log_{10}\dfrac{E_2}{E_1} = \log_{10}E_2 - \log_{10}E_1 = 23.5 - 22.6 = 0.9$

$\dfrac{E_2}{E_1} = 10^{0.9} \approx 7.94$

練習 (2)　予想される東海沖地震では $M = 8$ である．

(1) エネルギー E_3 を求めよう．

(2) $\dfrac{E_3}{E_2}$ を求めよう．

(3) $\dfrac{E_3}{E_1}$ を求めよう．

7.4 星の光度等級[7]

星の光度等級も magunitude[マグニチュード] という．

1. 紀元前１５０年頃，ギリシャの天文学者ヒッパルコス　Hipparchos は星の明るさを1〜6等星までに分けた．

2. 1830年頃，イギリスのハーシェル J.Herschell（天王星を発見した人の息子）は，次の関係「明るさは等級に応じて一定の割合で減少する」を明らかにした．

   (1)
   $$\begin{array}{lccccccccccc} \text{等級} & \mathbf{1} & \xrightarrow{+1} & \mathbf{2} & \xrightarrow{+1} & \mathbf{3} & \xrightarrow{+1} & \mathbf{4} & \xrightarrow{+1} & \mathbf{5} & \xrightarrow{+1} & \mathbf{6} \\ \text{明るさ} & \mathbf{L_1} & \xrightarrow{\times r} & \mathbf{L_2} & \xrightarrow{\times r} & \mathbf{L_3} & \xrightarrow{\times r} & \mathbf{L_4} & \xrightarrow{\times r} & \mathbf{L_5} & \xrightarrow{\times r} & \mathbf{L_6} \end{array}$$

   (2) $\mathbf{L_1} = 100\mathbf{L_6}$

3. 1850年頃，ポグソン　N.Pogson は次の式を明らかにした．

   $$\begin{array}{lcccccc} \text{等級} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \text{明るさ} & \mathbf{L_1} & \mathbf{L_2} & \mathbf{L_3} & \mathbf{L_4} & \mathbf{L_5} & \mathbf{L_6} \\ & & = r\times\mathbf{L_1} & = r\times\mathbf{L_2} & = r\times\mathbf{L_3} & = r\times\mathbf{L_4} & = r\times\mathbf{L_5} \\ & & & = r^2\times\mathbf{L_1} & = r^3\times\mathbf{L_1} & = r^4\times\mathbf{L_1} & = r^5\times\mathbf{L_1} \end{array}$$

   $100\mathbf{L_6} = \mathbf{L_1}\quad 100r^5\mathbf{L_1} = \mathbf{L_1}\quad 100r^5 = 1$

   $$r^5 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$$

   $$r = \sqrt[5]{\frac{1}{10^2}} = \sqrt[5]{10^{-2}} = 10^{-\frac{2}{5}} = 10^{-0.4}$$

4. 0等星を基準にすると，1等星の明るさは $\mathbf{L_1} = \mathbf{L_0}r$

   2等星の明るさは $\mathbf{L_2} = \mathbf{L_0}r^2$

   以下同様，m 等星では，　$\mathbf{L_m} = \mathbf{L_0}r^m = \mathbf{L_0}10^{-0.4\times m}$

例 (1) 光害のないところでは，人間の目は6等星まで見える．都会では，2等星までしか見えないところが多い．6等星と2等星の明るさを比較してみよう．

$$\log_{10}\frac{L_6}{L_2} = \log_{10}\frac{L_0r^6}{L_0r^2}$$

$$= \log_{10} r^4 = \log_{10}(10^{-0.4})^4 = \log_{10}(10^{-1.6}) = -1.6$$

$$\frac{L_6}{L_2} = 10^{-1.6} = \frac{1}{10^{1.6}} \approx \frac{1}{40}$$

練習問題　すばる（８．２m望遠鏡ハワイ・マウナケア）は，27等星まで見える．27等星の明るさと，6等星の明るさを比較してみよう．

[7] この節の内容は，渡邊勝　２０００年度（北海道高教組）札幌支部教育研究集会報告　「こんなの役に立つの？役立っているさ　常用対数の例」をもとにしたものである．

8 数表

8.1 別表 1

$$100(1-\frac{1}{100})^{0}=100$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{1}=99$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{2}=98.01$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{3}=97.0299$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{4}=96.059601$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{5}=95.099005$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{6}=94.148015$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{7}=93.206535$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{8}=92.274469$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{9}=91.351725$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{10}=90.438208$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{11}=89.533825$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{12}=88.638487$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{13}=87.752102$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{14}=86.874581$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{15}=86.005835$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{16}=85.145777$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{17}=84.294319$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{18}=83.451376$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{19}=82.616862$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{20}=81.790694$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{21}=80.972787$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{22}=80.163059$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{23}=79.361428$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{24}=78.567814$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{25}=77.782136$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{26}=77.004315$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{27}=76.234271$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{28}=75.471929$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{29}=74.717209$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{30}=73.970037$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{31}=73.230337$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{32}=72.498034$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{33}=71.773053$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{34}=71.055323$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{35}=70.344769$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{36}=69.641322$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{37}=68.944909$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{38}=68.25546$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{39}=67.572905$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{40}=66.897176$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{41}=66.228204$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{42}=65.565922$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{43}=64.910263$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{44}=64.26116$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{45}=63.618549$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{46}=62.982363$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{47}=62.352539$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{48}=61.729014$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{49}=61.111724$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{50}=60.500607$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{51}=59.895601$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{52}=59.296645$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{53}=58.703678$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{54}=58.116641$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{55}=57.535475$$

$$100(1-\frac{1}{100})^{56}=56.96012$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{57}=56.390519$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{58}=55.826614$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{59}=55.268348$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{60}=54.715664$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{61}=54.168508$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{62}=53.626823$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{63}=53.090554$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{64}=52.559649$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{65}=52.034052$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{66}=51.513712$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{67}=50.998575$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{68}=50.488589$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{69}=49.983703$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{70}=49.483866$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{71}=48.989027$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{72}=48.499137$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{73}=48.014146$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{74}=47.534004$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{75}=47.058664$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{76}=46.588078$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{77}=46.122197$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{78}=45.660975$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{79}=45.204365$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{80}=44.752321$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{81}=44.304798$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{82}=43.86175$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{83}=43.423133$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{84}=42.988901$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{85}=42.559012$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{86}=42.133422$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{87}=41.712088$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{88}=41.294967$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{89}=40.882017$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{90}=40.473197$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{91}=40.068465$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{92}=39.667781$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{93}=39.271103$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{94}=38.878392$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{95}=38.489608$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{96}=38.104712$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{97}=37.723665$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{98}=37.346428$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{99}=36.972964$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{100}=36.603234$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{101}=36.237202$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{102}=35.87483$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{103}=35.516081$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{104}=35.160921$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{105}=34.809311$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{106}=34.461218$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{107}=34.116606$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{108}=33.77544$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{109}=33.437686$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{110}=33.103309$$
$$100(1-\frac{1}{100})^{111}=32.772276$$

8.2 別表２

100 ⟶ 0	67.572905 ⟶ 39	45.660975 ⟶ 78
99 ⟶ 1	66.897176 ⟶ 40	45.204365 ⟶ 79
98.01 ⟶ 2	66.228204 ⟶ 41	44.752321 ⟶ 80
97.0299 ⟶ 3	65.565922 ⟶ 42	44.304798 ⟶ 81
96.059601 ⟶ 4	64.910263 ⟶ 43	43.861750 ⟶ 82
95.099005 ⟶ 5	64.261160 ⟶ 44	43.423133 ⟶ 83
94.148015 ⟶ 6	63.618549 ⟶ 45	42.988901 ⟶ 84
93.206535 ⟶ 7	62.982363 ⟶ 46	42.559012 ⟶ 85
92.274469 ⟶ 8	62.352539 ⟶ 47	42.133422 ⟶ 86
91.351725 ⟶ 9	61.729014 ⟶ 48	41.712088 ⟶ 87
90.438208 ⟶ 10	61.111724 ⟶ 49	41.294967 ⟶ 88
89.533825 ⟶ 11	60.500607 ⟶ 50	40.882017 ⟶ 89
88.638487 ⟶ 12	59.895601 ⟶ 51	40.473197 ⟶ 90
87.752102 ⟶ 13	59.296645 ⟶ 52	40.068465 ⟶ 91
86.874581 ⟶ 14	58.703678 ⟶ 53	39.667781 ⟶ 92
86.005835 ⟶ 15	58.116641 ⟶ 54	39.271103 ⟶ 93
85.145777 ⟶ 16	57.535475 ⟶ 55	38.878392 ⟶ 94
84.294319 ⟶ 17	56.960120 ⟶ 56	38.489608 ⟶ 95
83.451376 ⟶ 18	56.390519 ⟶ 57	38.104712 ⟶ 96
82.616862 ⟶ 19	55.826614 ⟶ 58	37.723665 ⟶ 97
81.790694 ⟶ 20	55.268348 ⟶ 59	37.346428 ⟶ 98
80.972787 ⟶ 21	54.715664 ⟶ 60	36.972964 ⟶ 99
80.163059 ⟶ 22	54.168508 ⟶ 61	36.603234 ⟶ 100
79.361428 ⟶ 23	53.626823 ⟶ 62	36.237202 ⟶ 101
78.567814 ⟶ 24	53.090554 ⟶ 63	35.874830 ⟶ 102
77.782136 ⟶ 25	52.559649 ⟶ 64	35.516081 ⟶ 103
77.004315 ⟶ 26	52.034052 ⟶ 65	35.160921 ⟶ 104
76.234271 ⟶ 27	51.513712 ⟶ 66	34.809311 ⟶ 105
75.471929 ⟶ 28	50.998575 ⟶ 67	34.461218 ⟶ 106
74.717209 ⟶ 29	50.488589 ⟶ 68	34.116606 ⟶ 107
73.970037 ⟶ 30	49.983703 ⟶ 69	33.775440 ⟶ 108
73.230337 ⟶ 31	49.483866 ⟶ 70	33.437686 ⟶ 109
72.498034 ⟶ 32	48.989027 ⟶ 71	33.103309 ⟶ 110
71.773053 ⟶ 33	48.499137 ⟶ 72	32.772276 ⟶ 111
71.055323 ⟶ 34	48.014146 ⟶ 73	32.444553 ⟶ 112
70.344769 ⟶ 35	47.534004 ⟶ 74	32.120107 ⟶ 113
69.641322 ⟶ 36	47.058664 ⟶ 75	31.798906 ⟶ 114
68.944909 ⟶ 37	46.588078 ⟶ 76	31.480917 ⟶ 115
68.255460 ⟶ 38	46.122197 ⟶ 77	31.166108 ⟶ 116

30.854447	$\longrightarrow$	117
30.545903	$\longrightarrow$	118
30.240444	$\longrightarrow$	119
29.938039	$\longrightarrow$	120
29.638659	$\longrightarrow$	121
29.342272	$\longrightarrow$	122
29.048849	$\longrightarrow$	123
28.758361	$\longrightarrow$	124
28.470777	$\longrightarrow$	125
28.186070	$\longrightarrow$	126
27.904209	$\longrightarrow$	127
27.625167	$\longrightarrow$	128
27.348915	$\longrightarrow$	129
27.075426	$\longrightarrow$	130
26.804672	$\longrightarrow$	131
26.536625	$\longrightarrow$	132
26.271259	$\longrightarrow$	133
26.008546	$\longrightarrow$	134
25.748461	$\longrightarrow$	135
25.490976	$\longrightarrow$	136
25.236066	$\longrightarrow$	137
24.983706	$\longrightarrow$	138
24.733869	$\longrightarrow$	139
24.486530	$\longrightarrow$	140
24.241665	$\longrightarrow$	141
23.999248	$\longrightarrow$	142
23.759255	$\longrightarrow$	143
23.521663	$\longrightarrow$	144
23.286446	$\longrightarrow$	145
23.053582	$\longrightarrow$	146
22.823046	$\longrightarrow$	147
22.594816	$\longrightarrow$	148
22.368867	$\longrightarrow$	149
22.145179	$\longrightarrow$	150
21.923727	$\longrightarrow$	151
21.704490	$\longrightarrow$	152
21.487445	$\longrightarrow$	153
21.272570	$\longrightarrow$	154
21.059845	$\longrightarrow$	155
20.849246	$\longrightarrow$	156
20.640754	$\longrightarrow$	157
20.434346	$\longrightarrow$	158
20.230003	$\longrightarrow$	159
20.027703	$\longrightarrow$	160
19.827426	$\longrightarrow$	161
19.629151	$\longrightarrow$	162
19.432860	$\longrightarrow$	163
19.238531	$\longrightarrow$	164
19.046146	$\longrightarrow$	165
18.855685	$\longrightarrow$	166
18.667128	$\longrightarrow$	167
18.480456	$\longrightarrow$	168
18.295652	$\longrightarrow$	169
18.112695	$\longrightarrow$	170
17.931568	$\longrightarrow$	171
17.752253	$\longrightarrow$	172
17.574730	$\longrightarrow$	173
17.398983	$\longrightarrow$	174
17.224993	$\longrightarrow$	175
17.052743	$\longrightarrow$	176
16.882216	$\longrightarrow$	177
16.713394	$\longrightarrow$	178
16.546260	$\longrightarrow$	179
16.380797	$\longrightarrow$	180
16.216989	$\longrightarrow$	181
16.054819	$\longrightarrow$	182
15.894271	$\longrightarrow$	183
15.735328	$\longrightarrow$	184
15.577975	$\longrightarrow$	185
15.422195	$\longrightarrow$	186
15.267973	$\longrightarrow$	187
15.115293	$\longrightarrow$	188
14.964141	$\longrightarrow$	189
14.814499	$\longrightarrow$	190
14.666354	$\longrightarrow$	191
14.519691	$\longrightarrow$	192
14.374494	$\longrightarrow$	193
14.230749	$\longrightarrow$	194
14.088441	$\longrightarrow$	195
13.947557	$\longrightarrow$	196
13.808081	$\longrightarrow$	197
13.670000	$\longrightarrow$	198
13.533300	$\longrightarrow$	199
13.397967	$\longrightarrow$	200
13.263988	$\longrightarrow$	201
13.131348	$\longrightarrow$	202
13.000034	$\longrightarrow$	203
12.870034	$\longrightarrow$	204
12.741334	$\longrightarrow$	205
12.613920	$\longrightarrow$	206
12.487781	$\longrightarrow$	207
12.362903	$\longrightarrow$	208
12.239274	$\longrightarrow$	209
12.116882	$\longrightarrow$	210
11.995713	$\longrightarrow$	211
11.875756	$\longrightarrow$	212
11.756998	$\longrightarrow$	213
11.639428	$\longrightarrow$	214
11.523034	$\longrightarrow$	215
11.407804	$\longrightarrow$	216
11.293725	$\longrightarrow$	217
11.180788	$\longrightarrow$	218
11.068980	$\longrightarrow$	219
10.958291	$\longrightarrow$	220
10.848708	$\longrightarrow$	221
10.740221	$\longrightarrow$	222
10.632818	$\longrightarrow$	223
10.526490	$\longrightarrow$	224
10.421225	$\longrightarrow$	225
10.317013	$\longrightarrow$	226
10.213843	$\longrightarrow$	227
10.111704	$\longrightarrow$	228
10.010587	$\longrightarrow$	229
9.9104816	$\longrightarrow$	230

8.3 別表３

100	$\longrightarrow$	0.000000
99	$\longrightarrow$	1.000000
98	$\longrightarrow$	2.010203
97	$\longrightarrow$	3.0308152
96	$\longrightarrow$	4.0620459
95	$\longrightarrow$	5.1041073
94	$\longrightarrow$	6.1572151
93	$\longrightarrow$	7.2215883
92	$\longrightarrow$	8.2974490
91	$\longrightarrow$	9.3850226
90	$\longrightarrow$	10.484538
89	$\longrightarrow$	11.596228
88	$\longrightarrow$	12.720327
87	$\longrightarrow$	13.857076
86	$\longrightarrow$	15.006785
85	$\longrightarrow$	16.171209
84	$\longrightarrow$	17.349157
83	$\longrightarrow$	18.540885
82	$\longrightarrow$	19.746654
81	$\longrightarrow$	20.966728
80	$\longrightarrow$	22.203409
79	$\longrightarrow$	23.455421
78	$\longrightarrow$	24.722706
77	$\longrightarrow$	26.005603
76	$\longrightarrow$	27.307305
75	$\longrightarrow$	28.625304
74	$\longrightarrow$	29.959899
73	$\longrightarrow$	31.314538
72	$\longrightarrow$	32.686962
71	$\longrightarrow$	34.077859
70	$\longrightarrow$	35.490114
69	$\longrightarrow$	36.920893
68	$\longrightarrow$	38.374270
67	$\longrightarrow$	39.847832
66	$\longrightarrow$	41.344572
65	$\longrightarrow$	42.863134
64	$\longrightarrow$	44.406404
63	$\longrightarrow$	45.972277
62	$\longrightarrow$	47.565397
61	$\longrightarrow$	49.182819
60	$\longrightarrow$	50.827441
59	$\longrightarrow$	52.500272
58	$\longrightarrow$	54.200702
57	$\longrightarrow$	55.930687
56	$\longrightarrow$	57.692526
55	$\longrightarrow$	59.485536
54	$\longrightarrow$	61.311080
53	$\longrightarrow$	63.170566
52	$\longrightarrow$	65.065442
51	$\longrightarrow$	66.997233
50	$\longrightarrow$	68.967721
49	$\longrightarrow$	70.977826
48	$\longrightarrow$	73.029461
47	$\longrightarrow$	75.124662
46	$\longrightarrow$	77.264941
45	$\longrightarrow$	79.452091
44	$\longrightarrow$	81.687957
43	$\longrightarrow$	83.974441
42	$\longrightarrow$	86.316666
41	$\longrightarrow$	88.714293
40	$\longrightarrow$	91.170871
39	$\longrightarrow$	93.690337
38	$\longrightarrow$	96.274800
37	$\longrightarrow$	98.927607
36	$\longrightarrow$	101.65458
35	$\longrightarrow$	104.45767
34	$\longrightarrow$	107.34179
33	$\longrightarrow$	110.31208
32	$\longrightarrow$	113.37393
31	$\longrightarrow$	116.53298
30	$\longrightarrow$	119.79511
29	$\longrightarrow$	123.16816
28	$\longrightarrow$	126.66015
27	$\longrightarrow$	130.27858
26	$\longrightarrow$	134.03286
25	$\longrightarrow$	137.93543
24	$\longrightarrow$	141.99690
23	$\longrightarrow$	146.23242
22	$\longrightarrow$	150.65558
21	$\longrightarrow$	155.28416
20	$\longrightarrow$	160.13832
19	$\longrightarrow$	165.24229
18	$\longrightarrow$	170.62219
17	$\longrightarrow$	176.30929
16	$\longrightarrow$	182.34145
15	$\longrightarrow$	188.76276
14	$\longrightarrow$	195.62776
13	$\longrightarrow$	203.00027
12	$\longrightarrow$	210.96462
11	$\longrightarrow$	219.62319
10	$\longrightarrow$	229.10576

8.4 別表４:三角関数表

角度	sin	cos	tan
0°	0.00000	1.0000	0.00000
1°	0.01745	0.9998	0.01746
2°	0.03490	0.9994	0.03492
3°	0.05234	0.9986	0.05241
4°	0.06976	0.9976	0.06993
5°	0.08716	0.9962	0.08749
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

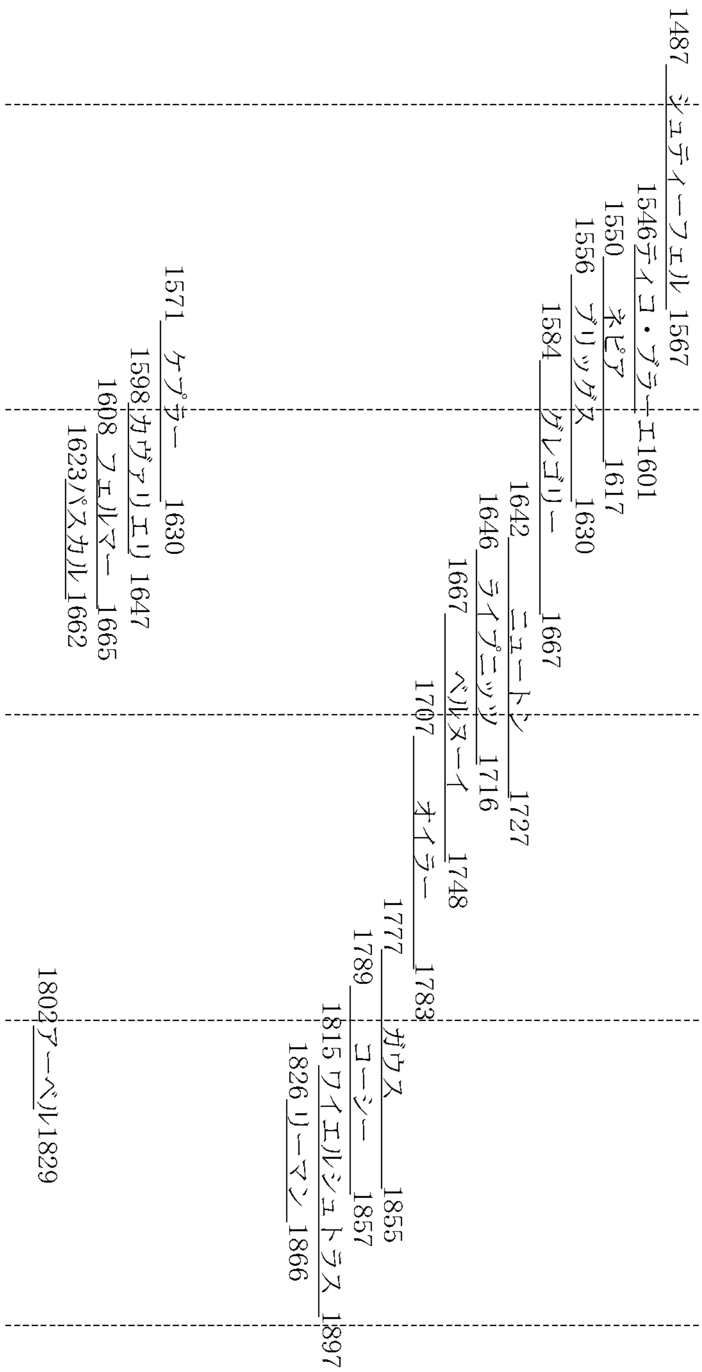
角度	sin	cos	tan
46°	0.7193	0.6947	1.036
47°	0.7314	0.6820	1.072
48°	0.7431	0.6691	1.111
49°	0.7547	0.6561	1.150
50°	0.7660	0.6428	1.192
51°	0.7771	0.6293	1.235
52°	0.7880	0.6157	1.280
53°	0.7986	0.6018	1.327
54°	0.8090	0.5878	1.376
55°	0.8192	0.5736	1.428
56°	0.8290	0.5592	1.483
57°	0.8387	0.5446	1.540
58°	0.8480	0.5299	1.600
59°	0.8572	0.5150	1.664
60°	0.8660	0.5000	1.732
61°	0.8746	0.4848	1.804
62°	0.8829	0.4695	1.881
63°	0.8910	0.4540	1.963
64°	0.8988	0.4384	2.050
65°	0.9063	0.4226	2.145
66°	0.9135	0.4067	2.246
67°	0.9205	0.3907	2.356
68°	0.9272	0.3746	2.475
69°	0.9336	0.3584	2.605
70°	0.9397	0.3420	2.747
71°	0.9455	0.3256	2.904
72°	0.9511	0.3090	3.078
73°	0.9563	0.2924	3.271
74°	0.9613	0.2756	3.487
75°	0.9659	0.2588	3.732
76°	0.9703	0.2419	4.011
77°	0.9744	0.2250	4.331
78°	0.9781	0.2079	4.705
79°	0.9816	0.1908	5.145
80°	0.9848	0.1736	5.671
81°	0.9877	0.1564	6.314
82°	0.9903	0.1392	7.115
83°	0.9925	0.1219	8.144
84°	0.9945	0.1045	9.514
85°	0.9962	0.08716	11.43
86°	0.9976	0.06976	14.30
87°	0.9986	0.05234	19.08
88°	0.9994	0.03490	28.64
89°	0.9998	0.01745	57.29
90°	1.	0	∞

8.5　別表５：常用対数表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.00000	0.004321	0.0086	0.01284	0.01703	0.02119	0.02531	0.02938	0.03342	0.03743
1.1	0.04139	0.04532	0.04922	0.05308	0.05690	0.06070	0.06446	0.06819	0.07188	0.07555
1.2	0.07918	0.08279	0.08636	0.08991	0.09342	0.09691	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2403	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.842	0.84260	0.8432	0.8439	0.8445
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.896	0.89650	0.8971
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996

9 年譜


1487 シュティーフェル 1567
1546 ティコ・ブラーエ 1601
1550 ネピア 1617
1556 ブリッグス 1630
1584 グレゴリー 1667
1642 ニュートン 1727
1646 ライプニッツ 1716
1667 ベルヌーイ 1748
1707 オイラー 1783
1777 ガウス 1855
1789 コーシー 1857
1815 ワイエルシュトラス 1897
1826 リーマン 1866
1571 ケプラー 1630
1598 カヴァリエリ 1647
1608 フェルマー 1665
1623 パスカル 1662
1802 アーベル 1829