二項定理から始まる数学

京都大学大学院理学研究科数学教室
加藤文元

1　普通の二項定理

よく知られている二項定理

$$(1+X)^n = \sum_{r=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_r X^r, \tag{1}$$

(ただし n は 0 以上の整数で、各 ${}_n\mathrm{C}_r$ はいわゆる二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ である) について考えてみたい。まず、この等式の証明であるが、これは左辺の $(1+X)^n$ が高々n 次の多項式である事を知れば、これを $(1+X)^n = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ とか置き、両辺を r 回微分すると、それぞれ $n(n-1)\cdots(n-r+1)$、$r!\cdot a_r$ となる事から $a_r = {}_n\mathrm{C}_r$ となり証明が完了する。

恒等式 $(1+X)(1+X)^n = (1+X)^{n+1}$ から $(1+X)\left(\sum_{r=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r\right) = \sum_{r=1}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_r x^r$ が従うが、これの左辺を展開して両辺の係数を比較すれば、よく知られた公式

$${}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r-1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_r \tag{2}$$

が従う。これはいわゆるパスカルの三角形

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$\cdots$	$\cdots\cdots$

(隣り合う二数の和がこれらに挟まれた一段下に等しい) に ${}_n\mathrm{C}_r$ が現れているという事の根拠である。

次に恒等式 $[(1+X)^m]^n = (1+X)^{mn}$ を考えよう。これは $\left(\sum_{r=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_r x^r\right)^n = \sum_{r=1}^{mn} {}_{mn}\mathrm{C}_r x^r$ という恒等式を導く。左辺を展開して係数比較すれば

$$\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=r \\ i_1\geq 0,\ldots,i_n\geq 0}} {}_m\mathrm{C}_{i_1}\cdots {}_m\mathrm{C}_{i_n} = {}_{mn}\mathrm{C}_r \tag{3}$$

が得られる。ここに左辺は負でない整数 r の n 個の負でない整数による分割 $i_1 + \cdots + i_n = r$ 全体を動く和である。

2　パスカルの半平面

人はパスカルの三角形は三角形だと思っている。$r > n$ の時には ${}_n\mathrm{C}_r = 0$ なのだが、何故かこれは書かない。これを書き込むと次の様になる。

$n=0$	**1** 0 0 0 0 $\cdots$
$n=1$	**1** **1** 0 0 0 0 $\cdots$
$n=2$	**1** **2** **1** 0 0 0 $\cdots$
$n=3$	**1** **3** **3** **1** 0 0 0 $\cdots$
$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

ここまで見えてくると、式 (2) を逆手に取って、つまり「隣り合う二数の和がこれらに挟まれた一段下に等しい」という原則が保たれる様に $n = -1, -2, \ldots$ の時の数を書き込んで見たくなる。書き込んだものが以下である。

$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$n=-2$	1 −2 3 −4 $\cdots$
$n=-1$	1 −1 1 −1 1 $\cdots$
$n=0$	**1** 0 0 0 0 $\cdots$
$n=1$	**1** **1** 0 0 0 0 $\cdots$
$n=2$	**1** **2** **1** 0 0 0 $\cdots$
$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

結局パスカルの三角形から始めて、数で平面の半分を埋め尽くす事が出来る。これを人はパスカルの半平面と呼ぶかどうかは知らない。

大事な事だが、実はこれは単なる数遊びではない。というのも、例えば $n = -1$ の時に該当する公式を書いてみると、$(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 - X^3 + \cdots$ という事になるのだが、これの X を $-X$ に取り替えた式 $(1-X)^{-1} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \cdots$ は、公比 X の等比級数の和の公式に見える。$|X| < 1$ な

る実数 (複素数でも良い) について、右辺は収束し左辺に等しいのは周知の事と思う。つまり、パスカルの半平面に現れた数の列は何がしかの数学的意味を持っている。

3 形式的巾級数

これを考えてみるために、(形式的) 巾級数 (formal power series) という概念が必要である。これは単に $\sum_{r=0}^{\infty} a_r X^r = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_r X^r + \cdots$ という形の無限個の項を有する和である。普通の多項式は、ある n より大きい次数の係数 a_r $(r > n)$ はすべて $= 0$ である様な巾級数と思う事が出来るから、これは多項式という概念の拡張を与えている。ただし、多項式の場合とちょっと違うのは、一般の巾級数には安易に X に数を代入出来ないという点である。下手に数を代入すると巾級数は発散してしまう。二つの巾級数 $F(X) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r X^r$ と $G(X) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r X^r$ について、その和と積は

$$\begin{aligned} F(X) + G(X) &= \sum_{r=0}^{\infty} (a_r + b_r) X^r, \\ F(X)G(X) &= \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{i+j=r \\ i \geq 0,\ j \geq 0}} a_i a_j \Big) X^r, \end{aligned} \tag{4}$$

で定義される。この定義が自然なものである事の証拠に、もし $F(X)$ と $G(X)$ が多項式であったらこれらは多項式の間の通常の和と積に一致する。結構大事な事だが、要するに形式的巾級数というのは、計算が出来る「記号」だと思うべきで、とりあえずその収束等は全然気にしないのが流儀である。多項式も、X に数を代入する等という邪念を起こしさえしなければ、単なる形式的な和に過ぎないから、項が無限個になった形式的巾級数もそう大差ない。只、大事な事は、項が無限個になっても多項式の時と同様に「計算」が出来るという事である。

4 二項定理

さて、負でない任意の整数 r について、変数 Y に関する多項式 $\binom{Y}{r} = \frac{Y(Y-1)\cdots(Y-r+1)}{r!}$ を考えよう。変数 Y に負でない整数 n を代入するとこれは明らかに ${}_n\mathrm{C}_r$ に等しい。しかし、大事な事だが、これはもはや Y に関する多項式だから Y にはどんな数も代入出来るという事だ。

これを踏まえて二項定理をもう一度書いてみよう: $(1+X)^s = \sum_{r=1}^{\infty} \binom{s}{r} X^r$. 既に述べた様に、$s$ が負でない整数 $= n$ の時は右辺は、見かけ上無限個足している様に見えるが実は有限和 (つまり多項式) である。しかし、形式的巾級数としては、sがどの様な数であろうとも、右辺は意味を持っている。勿論、左辺の解釈が問題であるし、それに両者が等号で結ばれているという事も奇怪である。でも、例えば $s = -1$ の時はまさに前に述べた式そのものではないだろうか。我々はとりあえず、s が有理数の時に、これを調べてみようと思う。

そこで二つの多項式 $F(Y) = \binom{Y}{r} + \binom{Y}{r-1} - \binom{Y+1}{r}$ と $G(Y) = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=r \\ i_1 \geq 0,\ldots,i_n \geq 0}} \binom{Y}{i_1} \cdots \binom{Y}{i_n} - \binom{nY}{r}$ を考えよう。公式 (2) と (3) から、Y に r 以上の自然数を代入するとこれらの多項式 $= 0$ がわかる。つまり r 以上の自然数はすべてこれらの多項式の解になっている。しかし、0 でない多項式の解は高々その次数個しかない。つまり、解は有限個しかあり得ない。という事はこれらの多項式は恒等的に 0 な多項式なのである。言い替えれば恒等式

$$\binom{Y}{r} + \binom{Y}{r-1} = \binom{Y+1}{r}, \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=r \\ i_1 \geq 0,\ldots,i_n \geq 0}} \binom{Y}{i_1} \cdots \binom{Y}{i_n} = \binom{nY}{r}, \tag{6}$$

が成り立つ事がわかる。これらは恒等式なのであるから、これからは変数 Y に負の整数や有理数、更には実数や複素数までも代入して成り立つという事となった。

我々は次の定理を証明したい:

定理. $s = p/q$ $(q > 0,\ \gcd(p,q) = 1)$ を任意の有理数とせよ。$(1+X)_1^s$ でその q 乗が $(1+X)^p$ に一致する様な巾級数でその定数項 a_0 が 1 であるものを表すとする。この時、次の公式が成り立つ:

$$(1+X)_1^s = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{s}{r} X^r. \tag{7}$$

勿論、これは s が負でない整数の場合には通常の二項定理 (1) に他ならない。

定理の証明. まず、s が負をも含めた整数で成り立つ事を示す。$s=-n$、ただし n は自然数とせよ。ここでおもむろに $(1+X)\left[\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}X^r\right]$ を考えて展開すると (ここで (4) を使う)、恒等式 (5) の Y に $-n$ を代入したものから、これは $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n+1}{r}X^r$ に等しい事がわかる。従って、数学的帰納法を使って証明が終る。次に $s=1/q$ $(q>0)$ という形で示そう。この時、$\left[\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/q}{r}X^r\right]^q$ を展開すると、恒等式 (6) で $Y=1/q,\ n=q$ としたものからこれは $1+X$ に等しくなる。これより、$s=1/q$ $(q>0)$ の時の証明が終る。一般の場合について、$s=p/q$ $(q>0,\ \gcd(p,q)=1)$ の時はこれを $p\cdot 1/q$ に分解、上の二つの場合に帰着しておいてから積をとって恒等式 (5) からすぐに証明が完了する。　証明終

5　応用

• **その 1.** いろいろな数の平方根の近似値を与える公式を作ろう。一番安直には $(1+x)_1^{1/2}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}x^r$ に値を放り込むというものだ。しかし、これは $|x|<1$ でしか収束は保証されないし、その収束も非常に遅い。工夫しよう。$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=(1+x)(1-x^2)^{-1/2}$ なんてものを考えてみてはいかが？$\sqrt{a}$ を求めたいなら、$x=\frac{a-1}{a+1}$ を代入すれば良い。これは $a>0$ なる全ての実数について収束する。右辺を二項定理で展開すると、$(1+x)(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\frac{63}{256}x^{10}+\frac{231}{1024}x^{12}+\frac{429}{2048}x^{14}+\cdots)$ となる。試みに $a=2$ $(x=1/3)$ とすると、最初の 10 項のみの計算で既に小数点以下 10 桁まで合う。$a=3$ $(x=1/2)$ でも計算出来て、最初の 10 項で小数点以下 7 桁まで合う。上の公式を憶えておいて、平方根の計算に使ってみては？ま、電卓使う方が速いけどね。

• **その 2.** 円周率の近似値も二項定理で求めてしまおう。円周率 π は半径 1 の半円の弧長である。円の方程式 $x^2+y^2=1$ から、弧長の線素は $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ で与えられるから、これを 0 から 1/2 まで積分して 6 倍すれば π が求まる (0 から 1 まで積分して 2 倍しても良いが、その場合は広義積分となるので、多分収束が遅くなると思う)。計算すると

$$
\begin{aligned}
\pi &= 6\int_0^{1/2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-1/2}{r}(-x^2)^r\right)dx\\
&= 6\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-1/2}{r}\int_0^{1/2}x^{2r}dx\\
&= 6\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-1/2}{r}\frac{1}{2^{2r+1}(2r+1)}\\
&= 6(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{3}{1280}+\tfrac{5}{14336}+\tfrac{35}{589824}+\cdots)
\end{aligned}
$$

が得られる。ここで 2 番目の等号はちょっと注意が必要であるが、それは若干解析を必要とするため、その理由は省略する。これは最初の 70 項で小数点以下 45 桁まで正しい値を出す。

• **その 3.** この例を読まれる前に僕が選択講義の講義録に書いた「p-進数の世界」(この冊子に収録されている) を参照される事をお勧めする。さて、(7) 式はあくまでも巾級数としての等式であり、これの X に自由に数が代入出来ると考えてはならない。実際、$(1-X)^{-1}=1+X+X^2+X^3+X^4+\cdots$ であるが、例えばこれに $X=5$ を代入して $-\frac{1}{4}=1+5+5^2+5^3+5^4+\cdots$ と結論する事は出来ない。何故なら右辺は発散してしまうから。その通り。普通の絶対値距離ではね。でも、上の式は、つまり 5-進数で $-1/4$ を展開したそのものである。これは普通の絶対値距離では収束しないが 5-進距離では収束する。この様なものでもっと面白い例は $\pm\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}(-5)^r$ で、これもやはり 5-進では収束して $x^2+1=0$ の二つの解を与える。実際、これは $\pm(1/2)(1-5)^{1/2}$ $(=\pm(1/2)\sqrt{-4})$ を二項定理で展開したものに他ならないから。二項定理と p-進数を組み合わせると、いろいろと不思議な等式が得られる事うけあいである。

6　結論

結論として、二項定理から何が始まるのであろうか？一つ挙げられるのは、実は上の定理で s は有理数である必要すらなく、実は任意の実数、もっと一

般に複素数でも良いという事だ (勿論、p-進数でも良い)。しかし、これは $(1+X)^s$ の定義を含めてちょっと難しい解析の知識が必要である。もう一つ。定理は $(1+X)^s$ という「函数」の Taylor 展開を与えている。ここで函数を括弧付きにした理由はちょっと深い。実はこれは代数函数と呼ばれるものの一つの例であって、一般に多値である (だから、通常の意味での函数ではない)。これらの意味を一つ一つ解明して行くには大学で習う複素解析等の知識が必要であろう。二項定理から始まる数学は結構深いのである。これについては読者の今後の研究に任せる。それから何か高校の数学にはなかった新しい数学が始まるはずである。

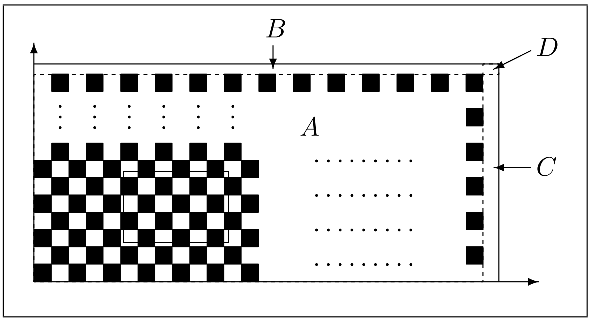
A　補遺: 長方形の分割の問題

別の日の夜ゼミで出した有名な問題とその解答を紹介する。

問題.　長方形が与えられたとせよ。今、この長方形を有限個の長方形 (どのようなものでも良い) で分割する。ただし、分割を与える各小長方形の各辺は与えられた長方形の各辺に平行又は直角でなければならない。分割であるから、勿論、隙間があったり重なりがあったりしてもいけない。以上の条件が満たされてさえいれば、その分割はどの様であっても良い。さて、今、分割を与える小長方形各々について、その縦又は横の長さは整数であるとする。この時、元々与えられた長方形もやはり縦又は横の長さが整数である事を示せ。

最初の解答例は高校生にはちょっと難しいと思う: まず、長方形 xy 平面に二つの辺が x 軸と y 軸に各々平行である様に配置しよう。この状態で函数 $e^{2\pi i(x+y)}$ を積分する: $\int e^{2\pi i(x+y)}dxdy$. 重積分を逐次積分に変形すると、これが 0 になる必要十分条件が長方形の縦又は横の長さが整数である事という事が容易にわかる。従って、問題の証明は積分の加法性から即座に得られる。

この解答は高校生には過酷すぎるので、もっと初等的な解答を紹介する。以下は私の友人で精神科医の上野雄文君 (久留米大学精神神経科、翼セミナーの OB) の素晴らしい解答である。長方形を xy-平面に置くのは上と一緒 (図では一つの頂点は原点に合わせた)。ここで左下の頂点 (図では原点) から出発して、長方形を 縦横長さ 1/2 のマス目 に切る。勿論、上の辺と右の辺の辺りでは余りが出来るかもしれない。さて、そのマス目に黒白互い違いに色を塗って、チェス盤の様な模様を作る (下の図参照)。内部の小長方形 (ちょっと見えにくいが、下の図に一つ書いた) を考えると、その上の黒の部分と白の部分の面積は等しい。何故なら縦か横どちらかが整数だからである (下の図では横が整数のつもり)。従って、大長方形全体でも黒の面積と白の面積は等しい。



さて、問題の長方形の縦横どちらも整数でないとしよう。図に縦より小さい最大整数横より小さい最大整数を縦横に持つ長方形の辺を破線で書いた。問題の長方形は図の様に A, B, C, D の 4 つの長方形に分割される。A の中では勿論、黒と白の面積は等しいが、B と C 上でも (前者は横、後者は縦が整数なので) やはり黒と白の面積は等しい。しかるに、D だが、これは左下の点の xy 座標はそれぞれ整数で、しかも縦も横も整数でないから黒と白が面積等しく書かれるという事はあり得ない。よって矛盾となり、題意が証明された。

二つの証明両方を理解出来た人は、それらが実は本質的には似通ったアイデアに基づいている事に気づくと思う。両者とも、「整数周期」をうまく捉えて議論している。その捉え方が前者は指数函数を使ったものなのであり、後者はマス目になっているのである。縦横長さ 1/2 のマス目に切るという発想も、そこから出てくるものと思われる。